A rendezvény támogatói:

BÉKÁSMEGYERI VERES PÉTER GIMNÁZIUM

ÓBUDA-BÉKÁSMEGYER ÖNKORMÁNYZATA

BME MATEMATIKA INTÉZET

„Agykutatóként azt kívánom hazám polgárainak, hogy az agyunkat egyre jobban lefoglaló külső információáradat ellenére képesek legyünk odafigyelni a lélek hangjára, több ezer éves hagyományainkat hordozó belső világunkra. Csak így állíthatjuk alkotóképességünket, vágyainkat, az együttműködő szellem erejét közös felemelkedésünk szolgálatába.”

Idézet Dr. Freund Tamás akadémikus, az első Bolyai-díjas bejegyzéséből a Bolyai Díj Emlékkönyvébe. Budapest, 2000. április 2.

BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY®

BOLYAI FARKAS

2020/21.

ORSZÁGOS DÖNTŐ

12. OSZTÁLY

BOLYAI JÁNOS

A rendezvény fővédnökei:
Prof. Dr. FREUND TAMÁS akadémikus, a Magyar Tudományos Akadémia elnöke
Dr. AÁRY-TAMÁS LAJOS, az Oktatási Jogok Biztosa

A verseny megálmodója és a feladatsorok összeállítója:
NAGY-BALÓ ANDRÁS középiskolai tanár

A honlap és az informatikai háttér működtetője:
CSUKA RÓBERT villamosmérnök

A feladatsorok lektorálója:
CSUKA RÓBERT villamosmérnök

Anyanyelvi lektor:
PAPP ISTVÁN GERGELY középiskolai tanár

http://www.bolyaiverseny.hu/matek912

Az 1-9. feladatok megoldását a honlapon a megfelelő helyre tett X-szel jelöljétek! Előfordulhat, hogy egy feladatban több válasz is helyes.

1. A legnagyobb n egész szám, amelyre $\dfrac{\sqrt{7}+2\sqrt{n}}{2\sqrt{7}-\sqrt{n}}$ is egész szám kisebb, mint…

(A) *100* **(B)** *200* **(C)** *300* **(D)** *400* **(E)** *500*

2. Az alábbiakból mennyi lehet x^2+y^2 értéke, ha $|x-y|\le 2$ és $|3x+y|\le 6$?

(A) *6* **(B)** *7* **(C)** *8* **(D)** *10* **(E)** *12*

3. Melyik állítás igaz az alábbiak közül?

(A) $\sin(3)<\sin(3°)$

(B) Ha $2a+3b+6c=0$, akkor az $ax^2+bx+c=0$, $a\ne 0$ egyenletnek van valós gyöke a $]0;1[$ intervallumban.

(C) Létezik olyan $\alpha\in R$, amelyre a $\cos(\alpha);\cos(2\alpha);\ldots;\cos(2^n\alpha);\ldots$ végtelen sorozat ($n\in N$) minden tagja negatív.

(D) Létezik olyan $f(x)$ függvény, mely estén bármely valós x-re $f(\sin(x))+f(\cos(x))=\sin(x)$.

(E) Van olyan poliéder, melynek három szomszédos egymásra merőleges lapja közül egyik háromszög, másik négyszög és a harmadik ötszög.

4. Összesen hány olyan a valós érték van, melyre a $\log_2\dfrac{1-\sin(x)\cos(x)}{1+\sin(x)\cos(x)}=ax$ egyenlet gyökeinek száma 2020?

(A) *1* **(B)** *2* **(C)** *3* **(D)** *végtelen sok* **(E)** *Az előzőek közül egyik sem.*

5. Az egység élű szabályos tetraéder minden lapjára kifelé egy-egy szabályos tetraédert építünk úgy, hogy egy lapjuk közös legyen. A létrejövő négy új csúcs által meghatározott tetraéder élének hány egység a hossza?

(A) $\dfrac{3}{2}$ **(B)** $\dfrac{5}{3}$ **(C)** $\dfrac{\sqrt{11}}{2}$ **(D)** $\sqrt{3}$ **(E)** $\dfrac{7}{4}$

6. Az alábbiak közül az első hány négyzetszám osztható két csoportba úgy, hogy a két csoportban a számok összege egyenlő? (Első n négyzetszámnak most az $1^2, 2^2, \ldots, n^2$ számokat tekintjük.)

(A) *12* **(B)** *13* **(C)** *2019* **(D)** *2020* **(E)** *2021*

7. Egy háromszögben az egyik oldallal párhuzamos érintőt húzunk a háromszögbe írható körhöz. Ezen érintőnek a háromszög belsejébe eső darabja a háromszög kerületének hányad része lehet?

(A) *Egyharmad része.* **(B)** *Egynegyed része.* **(C)** *Egyhatod része.*
(D) *Egynyolcad része.* **(E)** *Egykilenced része.*

8. Andris feketével megrajzolta egy nem szabályos tetraéder beírt gömbjének a lapokon levő érintési pontjai által meghatározott tetraéder éleit, majd zöldre színezett ez utóbbi élek közül néhány olyat, amely merőleges az eredeti tetraéder valamely élére. Az alábbiak közül hány élt színezhetett így zöldre?

(A) *1* **(B)** *2* **(C)** *3* **(D)** *5* **(E)** *6*

9. János leírt egy üres lapra néhány olyan $p(x)$ polinomot, amelyre teljesül a következő feltételek mindegyike: **a)** $p(x)$ együtthatói egész számok, **b)** $p(x)$ elsőfokú polinomok szorzatára bontható, **c)** $p(x)$ gyökei egész számok, **d)** $p(0)=-1$, **e)** $p(3)=128$. Az alábbiakból hány ilyen egymástól különböző polinomot írhatott erre a lapra János?

(A) *1* **(B)** *2* **(C)** *3* **(D)** *4*

(E) *Akármennyit, ami 4-nél több, de 10-nél kevesebb.*