BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2023. DECEMBER 2.)

FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

3. osztály

1. feladat (2 pont):
Mi lehet a szabály? Adjátok meg és töltsétek ki a táblázat hiányzó részeit!

□	2	3	5	6		12	
○	7	9	13		21		45

Megoldás: A szabály $\bigcirc = 2\cdot\square+3$ vagy $\square = (\bigcirc-3):2$, *1 pont*, helyes kitöltés is *1 pont.*

□	2	3	5	6	9	12	21
○	7	9	13	15	21	27	45

2. feladat (5 pont):
Rendezzétek át ebben a táblázatban a számokat úgy, hogy minden sorban, minden oszlopban és mindkét átlóban ugyanannyi legyen az összeg!

1	1	1	1
2	2	2	2
3	3	3	3
4	4	4	4

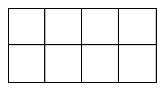
Megoldás: Úgy is át lehet rendezni a számokat, hogy minden sorban, oszlopban és átlóban is egy 1-es, egy 2-es, egy 3-as és egy 4-es legyen, de más megoldás is van. Egy-egy lehetséges elrendezést látunk mindkét esetre alább. Csak egy megoldásra adunk pontot. Helyes megoldás 5 pontot ér.

4	3	1	2
2	1	3	4
3	4	2	1
1	2	4	3

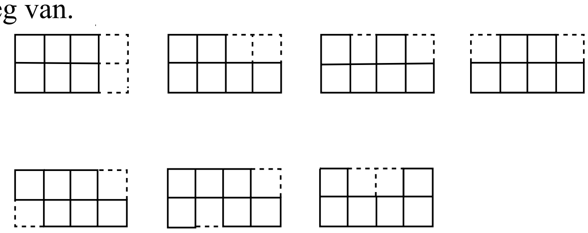
4	4	1	1
1	1	4	4
3	3	2	2
2	2	3	3

Ha rájönnek arra, hogy $4\cdot(1+2+3+4):4=10$ kell legyen a bűvös szám, és nem sikerül minden sort, oszlopot vagy átlót helyesen kitölteni, akkor 2 jó sor, oszlop vagy átló kitöltéséért 2 pont, 4 megfelelő kitöltésért 3 pont és 6 megfelelő kitöltésért 4 pont adható.

3. feladat (16 pont):
Az ábrán látható, nyolc kis négyzetből álló téglalapból vágjatok ki két kis négyzetet úgy, hogy a megmaradó alakzat ne essen szét, azaz a megmaradó négyzetek oldalaikkal csatlakozzanak egymáshoz! Hányféle lehet a megmaradó alakzat? (Két alakzat különböző, ha nem tudjuk pontosan egymásra rakni őket, így egy alakzatot és a tükörképét sem különböztetjük meg.) Rajzoljátok le a lehetőségeket!



Megoldás: Az alábbi hét lehetőség van.



1 jó ábra *2 pont*; 2 eltérő jó ábra *4 pont*; 3 eltérő jó ábra *6 pont*;
4 eltérő jó ábra *8 pont*; 5 eltérő jó ábra *10 pont*; 6 eltérő jó ábra *13 pont*;
7 eltérő jó ábra *16 pont*.

Villámkérdés (3 pont):
Egy tömbház minden lakásában apa és anya együtt él, akiknek van legalább egy gyerekük. Minden fiúnak van egy lánytestvére, és a fiúk többen vannak a lányoknál. Előfordulhat-e, hogy ebben a tömbház-ban több felnőtt lakik, mint gyerek? A lakásban a szülőkön és a gyerekeken kívül nem laknak mások.

Megoldás: Nem fordulhat elő *(1 pont)*. Hiszen minden családban van legalább egy lány (mivel minden családban van legalább 1 gyerek, ha az lány, akkor azért, ha pedig fiú, akkor, azért mert minden fiúnak van egy lánytestvére) *(1 pont)*. Tudjuk, hogy a fiúk többen vannak, mint a lányok, így a gyerekek együtt több mint kétszer annyian vannak, mint ahány család, a felnőttek száma pedig pontosan kétszerese a családok számának *(1 pont)*.

BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2023. DECEMBER 2.)

FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

4. osztály

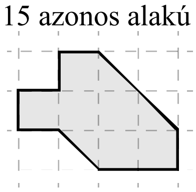
1. feladat (2 pont):
Egy 5 perces és egy 8 perces homokórával miként mérhető ki pontosan 6 perc?

Megoldás: Elindítjuk egyszerre mindkettőt, és amint lejár valamelyik, azt azonnal megfordítjuk. Az 5 perces második „letelésétől” mérjük az időt *(1 pont)*. Ekkor ugyanis a 8 percesből már letelt 2 perc, így ezen éppen 6 perc maradt hátra *(1 pont)*.

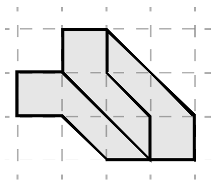
2. feladat (5 pont):
Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 számok közül hagyjátok el a legkevesebbet úgy, hogy a megmaradók két olyan csoportra legyenek oszthatók, melyekben a számok szorzata egyforma!

Megoldás: Ha a 7-est kihagyjuk *(1 pont)*, akkor a többi szám így írható: 1, 2, 3, 2×2, 5, 2×3, 2×2×2, 3×3, 2×5 *(1 pont)*. Mivel ezekben a 2-es, 3-as és 5-ös szorzó is páros darabszor található, megpróbálhatjuk két egyenlő szorzatú csoportra bontani őket. Észrevehető, hogy $1\cdot 3\cdot 4\cdot 6\cdot 10 = 2\cdot 5\cdot 8\cdot 9$ *(2 pont)*, ezért egyetlen szám elhagyásával célt érünk. A 7-est mindenképp el kell hagyni, különben az egyik csoportban a szorzat 7-nek többszöröse lenne, a másik pedig nem, így nem lehetne a szorzat egyforma *(1 pont)*. *Hogy egy számot mindenképp el kell hagyni, másképp is indokolható.*

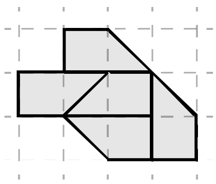
3. feladat (16 pont):
Daraboljátok fel az itt látható alakzatot 3, 5 majd 15 azonos alakú és nagyságú részre!



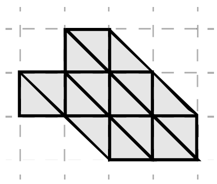
Megoldás:



3 részre
(*7 pont*)



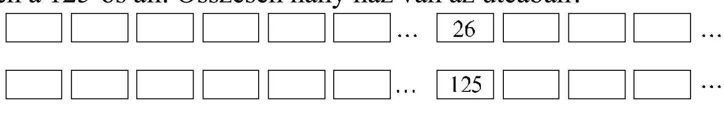
5 részre
(*5 pont*)



15 részre
(*4 pont*)

Az ezektől eltérő helyes darabolásokra ugyanennyi pont adható (egy esetre csak egyszer adható pont).

4. Villámkérdés (3 pont):
A Kökörcsin utcában a házak egyformák, az egymás utáni házak mindig ugyanakkora távolságra követik egymást, és mindegyik házzal szemben egy ház áll az utca másik oldalán. A házakat úgy számozták meg, hogy az utca elején a bal oldali első ház kapta az 1-es számot, ezután a baloldalon haladtak egyesével az utca végéig, majd visszafelé a jobboldalon folytatták a számozást. Így az utca elején, a jobboldalon levő házé a legnagyobb házszám. Tudjuk, hogy a 26-os számú házzal szemben a 125-ös áll. Összesen hány ház van az utcában?



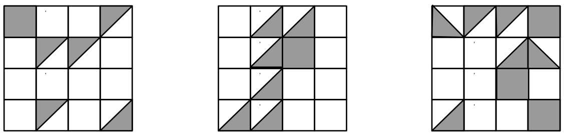
Megoldás: A 26-os számú ház előtt 25 ház van. *(1 pont)*. Ugyanennyi ház van a 125-ös számú ház után *(1 pont)*. Így az utcában $125 + 25 = 150$ ház van *(1 pont)*.

BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2023. DECEMBER 2.)

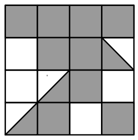
FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

5. osztály

1. feladat (2 pont):
Rajzoljátok le, mit látunk, ha ezt a három keretet tökéletes fedéssel egymásra toljuk (forgatni, vagy megfordítani nem szabad!)



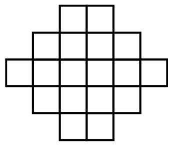
Megoldás: A helyes ábra alább látható *(2 pont)*. Ha csak 1 vagy 2 mező hibás, arra *1 pont* adható.



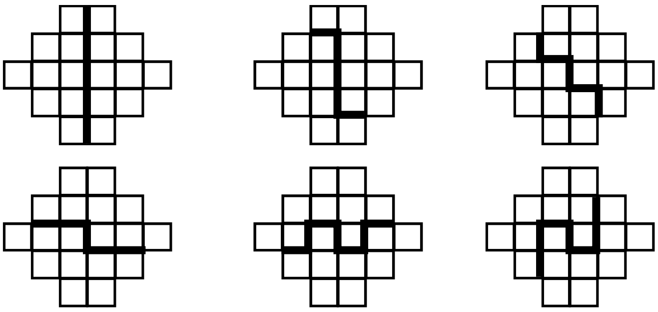
2. feladat (5 pont):
Körbe állt 22 ember, akik mind vagy lovagok, akik mindig igazat mondanak, vagy lókötők, akik mindig hazudnak. Összesen hány lovag és hány lókötő lehet közöttük, ha mindegyikük az állítja, hogy „Az óramutató járásának irányában utánam következő 10 ember lókötő!”?

Megoldás: 2 lovag (*1 pont*) és 20 lókötő (*1 pont*). Ha egymás után több mint 10 lókötő volna, akkor az első igazat mondana, ami ellentmondás, tehát egymás után legfeljebb 10 lókötő lehet (*1 pont*). Így biztosan van közöttük lovag (*1 pont*). Mivel a lovag igazat mond, 1 lovag után pontosan 10 lókötő következik (*1 pont*). Ebből adódik, hogy a 22 ember között 2 lovag és 20 lókötő található.

3. feladat (16 pont):
Daraboljátok fel a rácsvonalak mentén a lehető legtöbbféleképpen két azonos alakú és nagyságú részre az itt látható alakzatot! Két feldarabolás akkor eltérő, ha az egyikben nem lett olyan darab, amelyik fedésbe hozható a másikban keletkezett valamelyik darabbal!



Megoldás: Az alábbi hat eltérő feldarabolás létezik.



1 jó feldarabolás *2 pont*; 2 jó feldarabolás *4 pont*; 3 jó feldarabolás *7 pont*;
4 jó feldarabolás *10 pont*; 5 jó feldarabolás *13 pont*; 6 jó feldarabolás *16 pont*.

4. Villámkérdés (3 pont):
A páratlan számokat az alábbi téglalapokba csoportosítjuk a következő módon:

1	3, 5	7, 9, 11	13, 15, 17, 19	21,...

Mennyi lesz a 10. téglalapba kerülő számok összege?

Megoldás: 1000 lesz (*1 pont*). Megfigyelhető, hogy az összegek sorban

$1=1\cdot 1\cdot 1$

$3+5=8=2\cdot 2\cdot 2$

$7+9+11=27=3\cdot 3\cdot 3$

$13+15+17+19=64=4\cdot 4\cdot 4$

$21+23+25+27+29=125=5\cdot 5\cdot 5$ … (*1 pont*)

így a 10.-ben az összeg $10\cdot 10\cdot 10$ lesz (*1 pont*), ami 1000.

Ha egy csapat csak a téglalapban lévő számokat határozza meg, akkor összesen 2 pontot kaphat.

BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2023. DECEMBER 2.)

FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

6. osztály

1. feladat (2 pont):

Írjátok fel az $\frac{1}{10}$ -et két különböző módon négy, tovább már nem egyszerűsíthető 1-nél kisebb tört szorzataként!

Megoldás: Két lehetséges példa: $\frac{1}{10}=\frac{2}{7}\cdot\frac{7}{10}\cdot\frac{10}{11}\cdot\frac{11}{20}$; $\frac{1}{10}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{7}\cdot\frac{7}{10}$.

Eltérő helyes felírásonként1-1 pont jár (max 2 pont).

2. feladat (5 pont):

Helyezzetek el a lehető legtöbb fekete és fehér zsetont a sakktáblára (minden mezőbe legfeljebb 1 zseton tehető) úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban kétszer több legyen a fehér, mint a fekete zseton! Mennyi a legtöbb zseton, amit így el tudtok helyezni? (A sakktábla 8×8-as négyzetrácsként tekinthető.)

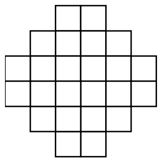
Megoldás: A legtöbb 48. (*1 pont*). Ha valamelyik oszlopban 3 fekete lenne, akkor abban 6 fehérnek kellene lennie, vagyis ebben az oszlopban 9 mezőre tettünk volna zsetont. Ez lehetetlen, mivel egy oszlopban csak 8 mező van (*1 pont*). Így legtöbb 2 fekete és ebből adódóan 4 fehér zseton helyezhető egy oszlopba. Ha ezt mindegyikbe el tudjuk a feltételeknek megfelelően helyezni, akkor $6\cdot 8=48$ lehet a legtöbb, amit elhelyezhetünk.

Egy ilyen példát láthatunk ábránkon (*3 pont*) (tehát minden fehér mezőbe tettünk fehér zsetont, ez 32 db és a fehér főátló melletti párhuzamos két átlóba feketét, ez 14 db, valamint a két fekete sarokmezőbe is feketét, így összesen $14+2=16$ db feketét). *Ha 24-et tudnak csak elhelyezni, arra 1 pont adható.*

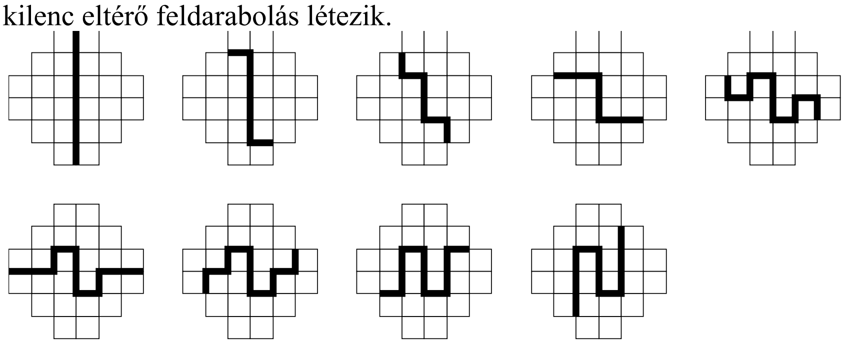
x	o		o		o	x	o
o		o		o	x	o	x
	o		o	x	o	x	o
o		o	x	o	x	o	
	o	x	o	x	o		o
o	x	o	x	o		o	
x	o	x	o		o		o
o	x	o		o		o	x

3. feladat (16 pont):

Daraboljátok fel a rácsvonalak mentén a lehető legtöbbféleképpen két azonos alakú és nagyságú részre az itt látható alakzatot! Két feldarabolás akkor eltérő, ha az egyikben nem lett olyan darab, amelyik fedésbe hozható a másikban keletkezett valamelyik darabbal!



Megoldás: Az alábbi kilenc eltérő feldarabolás létezik.



1 jó feldarabolás *1 pont*; 2 jó feldarabolás *2 pont*; 3 jó feldarabolás *4 pont*;
4 jó feldarabolás *6 pont*; 5 jó feldarabolás *8 pont*; 6 jó feldarabolás *10 pont*;
7 jó feldarabolás *12 pont*; 8 jó feldarabolás *14 pont*; 9 jó feldarabolás *16 pont*.

4. Villámkérdés (3 pont):

Csépa hétfőn csak annyit mond: AJ! Kedden: AJJA! Szerdán AJJAJAAJ! Vajon, ha következetesen folytatja a mondandóját, mit mond csütörtökön? Miért?

Megoldás: Azt mondja csütörtökön, hogy: AJJAJAAJJAAJAJJA! (*1 pont*). Amit előző nap mondott megismételte és megtoldotta ugyanannyi betűvel (*1 pont*), amit úgy hozott létre, hogy az első rész betűi közül az A és a J betűket felcserélte (*1 pont*).

Ha más megoldást adnak és arra megfelelő, helyes indoklással szolgálnak, akkor arra 3 pont jár.

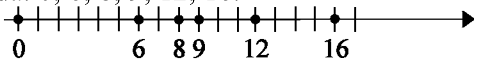
BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2023. DECEMBER 2.)

FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

7. osztály

1. feladat (2 pont):
A számegyenesen adjatok meg 6 számot úgy, hogy a két szélső kivételével mindegyik, két másik megadott között középen legyen és a szomszédos számok közti különbségek mind eltérők legyenek!

Megoldás: Egy lehetséges helyes példa: 0; 6; 8; 9; 12; 16.

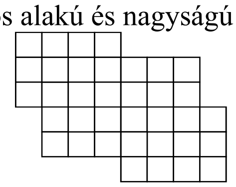


Ekkor 6 a 0 és 12 között van középen; 8 a 0 és 16 között; 9 a 6 és 12 között; 12 a 8 és 16 között van középen. A szomszédosok közti különbségek rendre 6, 2, 1, 3, 4 valóban mind eltérőek. Helyes példa *1 pont*, ellenőrzés *1 pont*.
Ha egy csapat olyan példát ad, hogy a két szélső kivételével mindegyik két másik megadott között középen van, de a másik tulajdonság nem érvényes, arra 1 pont adható. Ha olyan példát adnak, hogy a szomszédos számok közti különbségek mind eltérők, de a másik tulajdonság nem érvényes, arra nem jár pont.

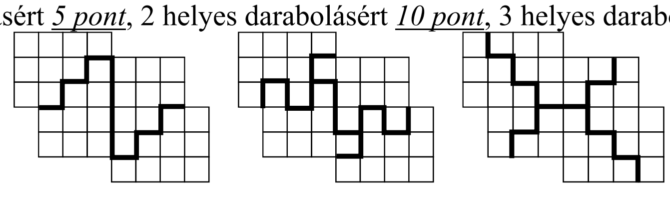
2. feladat (5 pont):
Lóvárosból Dabósába a Nagyhegyen át csak 15 egymás melletti alagúton keresztül lehet eljutni. Az alagutak mindegyike bejáratának közelében egy-egy kémet helyeztek el, aki látja, hány katona vonul át az ott lévő és a közvetlen mellette lévő két alagúton (A szélső alagút közelében lévő kém természetesen csak egy szomszédos utat lát még). Minden kém naponta jelentést küld Dabósába, hogy az általa szemmel tartott alagutakon összesen hány katona ment át. Meg lehet-e ezekből a jelentésekből állapítani, hogy külön-külön hány katona ment át az egyes alagutakon? Ha igen, hogyan, ha nem, miért nem?

Megoldás: Igen, meg lehet állapítani (*1 pont*). Számozzuk meg 1-től 15-ig sorban az alagutakat. Ha a 2.-nál lévő kém számából (1., 2., 3. úton átmenők számának összege) kivonjuk az 1.-nél lévő kém számát (1. és 2. alagúton átmenők számának összege), akkor megkapjuk, hogy hány katona ment át a 3. alagúton (*1 pont*).
A 4. kém számából megismerjük ezután, hogy összesen hány katona ment át a 4. és 5. alagúton, így az 5. kém számából ha ezt kivonjuk, megtudjuk a 6. alagúton áthaladó katonák számát. Így folytatva ismertté válik előttünk a 3., 6., 9., 12., 15. alagúton áthaladók száma (*1 pont*).
Azonos módon a másik végétől kezdve, a 14. és 15. kém számaiból megismerjük a 13. alagúton (*1 pont*) áthaladók számát és folytatva ezt a 10., 7., 4., 1. alagúton áthaladóké (*1 pont*). Ezt követően már egyszerű a kimaradó alagutakon áthaladókét megismerni.

3. feladat (16 pont):
Az alábbi alakzatot daraboljátok fel négy azonos alakú és nagyságú részre! Adjatok meg 3 eltérő feldarabolást!



Megoldás: 1 helyes darabolásért *5 pont*, 2 helyes darabolásért *10 pont*, 3 helyes darabolásért *16 pont* jár.



4. Villámkérdés (3 pont):
Katinak van egy asztala, melynek asztallapja egy 4 m^2 területű kör, és van hozzá egy ugyanilyen méretű, kör alakú terítője. Józsinak van egy asztala, melynek asztallapja egy két méter oldalhosszúságú négyzet, és van hozzá egy ugyanilyen méretű, négyzet alakú terítője. Egy nap elcserélték egymással a terítőket, és mindketten felrakták a kapott terítőt a saját asztalukra úgy, hogy a terítő és az asztallap középpontja egybeesett. Mindketten azt látták, hogy a terítő részben lelóg az asztallapról, az asztallap pedig részben fedetlenül maradt. Melyiküknél volt nagyobb területű a fedetlenül maradt rész?

Megoldás: Ha a két alakzatot egymásra helyezzük, akkor a két alakzat közös része mutatja azt a területet, amit mindkét asztal esetén lefed a terítő (*1 pont*). Mivel a négyzet és a kör területe megegyezik, ezért a kör négyzetből kilógó részeinek együttes területe megegyezik a négyzet körből kilógó részeinek együttes területével (*1 pont*). Tehát a két lefedetlen rész egyforma területű (és ugyanekkora összterületűek az egyes terítőkből lelógó részek is) (*1 pont*).

BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2023. DECEMBER 2.)

FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

8. osztály

1. feladat (2 pont):
Az állatkertben 10 elefánt van. Ha az ott lévő hatalmas mérleg baloldali tálcájára bármelyik négy elefánt egyszerre rááll, az mindig nehezebbnek bizonyul, mint a többi közül bármely három, amelyik a jobboldali tálcára áll. Biztosak lehetünk-e abban, hogy közülük bármely öt elefánt nehezebb, mint a többi közül bármelyik négy elefánt?

Megoldás: Nem lehetünk biztosak (*1 pont*). Ha például a 10 elefánt közül öt elefánt mindegyike 7 tonnás, és a többi mind 9 tonnás, akkor a legkönnyebb négy is 28 tonnás és a legnehezebb három 27 tonnás, míg a legkönnyebb öt 35 tonnás és a legnehezebb négy pedig 36 tonnás (*1 pont*).

2. feladat (5 pont):
Töltsétek ki a bűvös négyzet hiányzó mezőit úgy, hogy minden sorban, minden oszlopban és mindkét átlóban is a számok összege ugyanannyi legyen! Keressétek meg az összes helyes kitöltést Mondjátok el a megfejtéshez vezető utat!

1		5
3		

Megoldás: Az egyetlen helyes kitöltés jobbra látható. (*1 pont*)

1	6	5
8	4	0
3	2	7

Egy lehetséges út a megfejtéshez a következő. Mivel a két átlóban ugyanannyi kell legyen a számok összege, a jobb alsó sarokban 7-esnek kell lennie (*1 pont*).
Ha az első sor középső elemét x-szel jelöljük, akkor a táblázat a jobbra látható módon tölthető ki. (*2 pont*)

1	x	5
x+2	x-2	x-6
3	x-4	7

Egyenlővé téve az egyik átló elemeinek összegét a középső oszlop elemeinek összegével:
$1+(x-2)+7=x+(x-2)+(x-4)$, megkapjuk, hogy $8=2x-4$, ahonnan $x=6$ (*1 pont*), és ezzel minden mezőt kitölthetünk.

3. feladat (16 pont):
Oldjátok meg a pozitív egész számok halmazán a következő egyenletet!

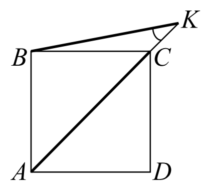
$$x+\frac{2}{y+\frac{2}{z}}=\frac{7}{3}$$

Megoldás: Mivel $\frac{7}{3}=2\frac{1}{3}$ és $\frac{2}{y+\frac{2}{z}}>0$, x értéke 1 vagy 2 lehet (*2 pont*).

Ha $x=1$, akkor $\frac{2}{y+\frac{2}{z}}=1\frac{1}{3}$, vagyis $y+\frac{2}{z}=\frac{3}{2}=1\frac{1}{2}$ (*2 pont*). Mivel $\frac{2}{z}>0$, y értéke csakis 1 lehet (*1 pont*), amiből következik, hogy $\frac{2}{z}=\frac{1}{2}$ és így $z=4$ (*1 pont*). Így (1; 1; 4) egy lehetséges megoldása az egyenletnek (*1 pont*).

Ha $x=2$, akkor $\frac{2}{y+\frac{2}{z}}=\frac{1}{3}$, vagyis $y+\frac{2}{z}=6$ (*2 pont*). Az utóbbi egyenletben y és 6 egészek, ezért $\frac{2}{z}$ is egész kell legyen (*2 pont*), ami csak $z=1$ és $z=2$ esetén teljesül (*1 pont*). Ha $z=1$, akkor $y=4$ (*1 pont*), ha pedig $z=2$, akkor $y=5$ (*1 pont*). Tehát az egyenletnek megoldása még (2; 4; 1) (*1 pont*) és (2; 5; 2) is (*1 pont*).

4. Villámkérdés (3 pont):
Az $ABCD$ négyzet AC átlójának C-n túli meghosszabbításán K olyan pont, melyre $BK=AC$. Hány fokos a BKC szög?



Megoldás: A négyzet átlói egyformák és egymásra merőlegesek (*1 pont*), így BKD háromszög szabályos (*1 pont*), ezért BKD szög 60° és így BKC szög 30° (*1 pont*).