BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2017. NOVEMBER 18.)

FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

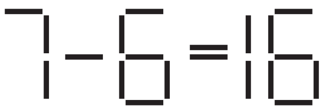
3. osztály

1. feladat (*2 pont*):
Két polcon összesen 72 könyv található. Miután az első polcról a másodikra áttettünk 14 könyvet, mindkét polcon ugyanannyi könyv lett. Hány könyv volt eredetileg az első polcon?

Megoldás:
A végén 36 könyv lett az első és a második polcon is (*1 pont*). Ha képzeletben visszateszünk 14 könyvet a másodikról az elsőn lévő 36 könyvhöz, akkor megkapjuk, hogy az elsőn eredetileg $36+14=50$ könyv volt (*1 pont*).

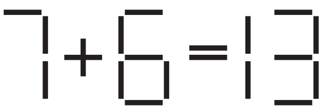
2. feladat (*5 pont*):
Helyezzetek át máshová

a) 1 pálcikát a  műveletsorban,

b) 2 pálcikát a  műveletsorban

úgy, hogy mindkét esetben igaz egyenlőséget kapjatok!

Megoldás:
Egy-egy helyes megfejtés:

a)  **b)** 

Az a) feladat helyes megfejtéséért *3 pont*, a b) feladat helyes megfejtéséért *2 pont* jár.

3. feladat (*3 pont*):
Misinek 2-vel több a lánytestvére, mint a fiútestvére. Hánnyal több a lány-, mint a fiúgyermek ebben a családban?

Megoldás:
1-gyel. (*1 pont*). Misi nélkül vannak a lányok 2-vel többen, mint a fiúk, ezért ha Misit is bevesszük a fiúk közé, így már csak 1-gyel lesz több lány, mint fiú (*2 pont*).

BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2017. NOVEMBER 18.)

FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

4. osztály

1. feladat (*2 pont*):
Három dobozban bors, só és fűszerpaprika van, mindegyikben más. A dobozokon címkék találhatók, amelyeken ezt olvassuk: „Fűszerpaprika”, „Bors”, „Só vagy bors”, de egyik írás sem igaz arra a dobozra, amelyiken van. Állapítsátok meg, hogy melyik dobozban mi van!

Megoldás:
Amelyik dobozra „Só vagy bors” van írva, abban csakis fűszerpaprika lehet. (*1 pont*). A bors így már csak a másik kettő egyikében lehet, de a „Bors” feliratúban nem lehet, ezért a bors a „Fűszerpaprika” feliratúban van. Így a só a „Bors” feliratú dobozban található (*1 pont*).

2. feladat (*5 pont*):
Egy szöcske egy egyenes mentén minden ugrásával vagy előreugrik 80 cm-t, vagy hátra 50 cm-t. Juthat-e 7 ugrással pontosan 1 m 70 cm-re a kiindulási ponttól? És 7-nél kevesebb ugrással?

Megoldás:
7-tel juthat (*1 pont*), ha előreugrik 4-et és hátra 3-at, ugyanis $4\cdot 80-3\cdot 50=320-150=170$ (*1 pont*).
Juthat 6-tal is (*1 pont*), mégpedig a kiindulási ponttól 170 cm-re hátra (*1 pont*), ha hátraugrik 5-öt és előre 1-et, mert $5\cdot 50-1\cdot 80=250-80=170$ (*1 pont*).

3. feladat (*3 pont*):
Egy családban összesen 3 gyermek van. Életkoraik összege most 31 év. Hány év múlva lesz életkoraik összege 55 év?

Megoldás:
8 év múlva (*1 pont*). Életkoraik összege 24 évvel növekszik (*1 pont*), ezalatt mindhárom gyermek ugyanannyi évvel lesz idősebb (*1 pont*), ezért $24:3=8$ év múlva lesz ez.

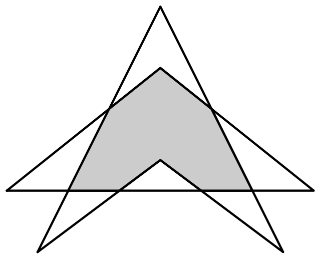
BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2017. NOVEMBER 18.)

FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

5. osztály

1. feladat (*2 pont*):
Rajzoljatok le egy háromszöglapot és egy négyszöglapot úgy, hogy az általuk fedett közös rész egy nyolcszöglap legyen!

Megoldás:
Egy jó rajz (*2 pont*) a következő:



Ha konkáv négyszöggel próbálkoznak, de nem sikerül megfelelőt rajzolniuk, akkor kaphatnak 1 pontot.

2. feladat (*5 pont*):
Egy kör kerületére felírtuk valamilyen sorrendben 1-től 9-ig az összes számjegyet egyszer-egyszer. Ezután az összes lehetséges módon – az óramutató járásával egyező irányban haladva – háromjegyű számokat gyártottunk a szomszédos számjegyek összeolvasásával. Mennyi lehet az összege ennek a 9 darab háromjegyű számnak?

Megoldás:
Minden számjegy három számban fog szerepelni: egyszer az egyesek, egyszer a tízesek és egyszer a százasok helyiértékén (*1 pont*). Ezért mindegy, milyen sorrendben rendeztük el a számjegyeket a kör kerületén, az összeg mindig állandó (*1 pont*).
Így az összeg (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) egyesből, ugyanennyi tízesből és ugyanennyi százasból fog állni (*1 pont*), vagyis a számok összege $45\cdot1+45\cdot10+45\cdot100=45+450+4500=4995$ (*2 pont*).

3. feladat (*3 pont*):
Egy néhány oszlopból és 8 sorból álló táblázat mezőibe számok vannak beírva. Minden sorban az összeg 10, és minden oszlopban az összeg 20. Hány oszlop lehet ebben a táblázatban?

Megoldás:
4 oszlop van (*1 pont*). A táblázat számainak összege kétféleképpen is kiszámítható, és mindkét eljárással ugyanazt az eredményt kell kapnunk (*1 pont)*. Ha soronként adjuk össze a számokat, $8\cdot10=80$-at kapunk. Oszloponként összegezve pedig annyiszor 20-at kapunk, ahány oszlop van, és ennek is 80-at kell adnia eredményül. Ez csak akkor lehetséges, ha az oszlopok száma 4, mivel $80:20=4$ (*1 pont*).

BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2017. NOVEMBER 18.)

FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

6. osztály

1. feladat (*2 pont*):
Egy téglalapban az egyik szemközti oldalpár mindkét oldalát azonos irányban 99 cm-rel növeltük, a másik szemközti oldalpár oldalait pedig azonos irányban 1 cm-rel csökkentettük. Hogyan változhatott eközben az eredeti téglalap területe?

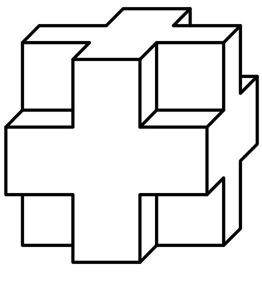
Megoldás:
A terület növekedhetett, csökkenhetett, de változatlan is maradhatott.
Ha a téglalap méretei centiméterben 2×100, és a 2 cm-es oldalt csökkentjük 1 cm-rel, a 100 cm-es oldalt pedig növeljük 99 cm-rel, akkor az eredeti 200 cm^2-ről a terület lecsökken 199 cm^2-re.
Ha a téglalap méretei centiméterben 10×10, akkor ezt 9×109-esre változtattuk, így a terület 100 cm^2-ről 981 cm^2-re nőtt.
Ha a téglalap méretei centiméterben 11×990, akkor ezt 10×1089-esre változtattuk, így a terület mindkét esetben 10 890 cm^2, tehát nem változott.
Jó válasz (1 pont), ha példával is legalább kettőt alátámasztanak, akkor még 1 pont jár érte.

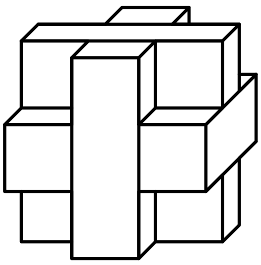
2. feladat (*5 pont*):
Létezik-e négy olyan szám, amelyek között a páronkénti különbségek 2, 2, 3, 4, 5, 6?

Megoldás:
Nem létezik (*1 pont*). Tegyük fel, hogy van négy ilyen szám. Mivel egyetlen különbség sem 0, ezért a négy szám között nincs két egyforma (*1 pont*). Így növekvő sorrendbe állíthatjuk őket, és a legnagyobb, valamint a legkisebb szám közti különbség ekkor 6. Innen többféleképpen is ellentmondásra juthatunk. Például: az egymást követő szomszédos számok közti különbségek összegének szintén 6-nak kell lennie (*1 pont*), ám a lehetséges legkisebb köztes különbségek valamilyen sorrendben a 2, 2, 3 (*1 pont*), de ezek összege már 7 (*1 pont*). Ezért nem létezik négy, a feltételeknek megfelelő szám.

Második megoldás (vázlat):
Ha megvizsgáljuk páros és páratlan szempontból a négy számot az összes lehetséges módon (*2 pont*), azt kapjuk, hogy a páratlan különbségek száma összesen 0, 3 vagy 4 lehet (*2 pont*), de 2 sosem, ezért nem létezik négy ilyen szám (*1 pont*).

3. feladat (*3 pont*):
A Rubik-kocka minden lapja 9 darab $1\times1\times1$-es kis kockából áll, és egy ilyen lap $3\times3\times1$-es. Tudjuk, hogy a Rubik-kockából hiányzik a test középső kis kockája. Az ábrán látható Rubik-kockának hiányzik a 8 sarka is. Ki lehet-e rakni ezt a testet $3\times1\times1$-es testekből? Ha igen, hogyan? Ha nem, miért nem?





Megoldás:
Ki lehet rakni (*1 pont*), az ábrán látható módon (*elég, ha szóban elmondják*) (*2 pont*).

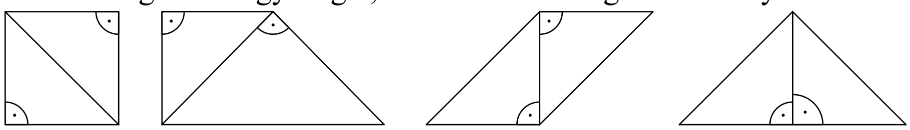
BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2017. NOVEMBER 18.)

FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

7. osztály

1. feladat (*2 pont*):
Egy négyszöget annak egyik átlója két egyenlő szárú derékszögű háromszögre bontja. Hány fokosak lehetnek egy ilyen négyszög belső szögei?

Megoldás:
Gondolkozzunk visszafelé: illesszünk össze két egyenlő szárú derékszögű háromszöget úgy, hogy azok együtt egy négyszöget alkossanak! A két egymáshoz csatlakozó két oldal lehet két átfogó, egy átfogó és egy befogó, valamint két befogó. Az utóbbi esetben kétféleképp illeszthető össze a két háromszög (aszerint, hogy a közös oldal két különböző vagy ugyanazon végénél helyezkednek el a derékszögű csúcsok), de ebből a második lehetőség nem négyszöget, hanem háromszöget eredményez.



A keletkező négyszögek szögei: az 1. esetben minden szöge 90°-os, a 2. esetben a szögek nagysága 45°, 90°, 90° és 135°, míg a 3. esetben a szögek nagysága 45°, 45°, 135° és 135°.
Két négyszög megtalálásáért 1 pont, három megtalálásáért 2 pont jár.

2. feladat (*5 pont*):
Írjátok be a 3×3-as táblázat mezőibe 1-től 9-ig az összes számjegyet úgy, hogy a lehető legtöbb sorban és oszlopban legyen a számok összege négyzetszám! Indokoljátok, miért ez a legtöbb!

Megoldás:
Az összeg egy sorban vagy oszlopban legalább $1+2+3=6$ és legfeljebb $7+8+9=24$ (*1 pont*). Mivel négyzetszámot szeretnénk összegként megkapni, ezért az csak a 9 vagy a 16 lehet (*1 pont*).
Ha sikerülne három sorban is létrehozni a négyzetszámot összegként, akkor a táblázat összes mezőjének összege csak a következő négyféle lehetne: $9+9+9=27$, $9+9+16=34$, $9+16+16=41$ vagy $16+16+16=48$ (*1 pont*), ám ezek egyike sem egyezik a kilenc mező tényleges összegével, ami $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$. Vagyis legfeljebb két sorban lehet a számok összege négyzetszám. Hasonlóan beláthatjuk, hogy legfeljebb két oszlopban lehet a számok összege négyzetszám (*1 pont*). Az ábrán látható elrendezésben 2 sor és 2 oszlop számjegyeinek összege is négyzetszám (*1 pont*). Így a lehető legtöbbre mutattunk példát.

3	1	5
2	6	8
4	9	7

3. feladat (*3 pont*):
Mennyi a $2017\cdot201820182018-2018\cdot201720172017$ műveletsor eredménye?

Megoldás:
Az eredmény 0 (*1 pont*).
Mivel $201820182018=2018\cdot100010001$ és $201720172017=2017\cdot100010001$ (*1 pont*), ezért
$2017\cdot201820182018-2018\cdot201720172017=2017\cdot2018\cdot100010001-2018\cdot2017\cdot100010001=0$
(*1 pont*).

BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2017. NOVEMBER 18.)

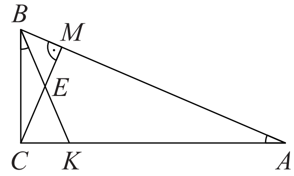
FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

8. osztály

1. feladat (*2 pont*):

Az ABC derékszögű háromszög AB átfogójához tartozó magassága CM (ahol M az AB szakaszon van). A K olyan pont az AC befogón, hogy $KBC\sphericalangle = BAC\sphericalangle$. A CM és KB szakaszok metszéspontja E. Bizonyítsátok be, hogy $EK = EB$!

Megoldás:



$MCB\sphericalangle = BAC\sphericalangle$, mivel mindkettő az $ABC\sphericalangle$ pótszöge, ezért $MCB\sphericalangle$ azonos $CBK\sphericalangle$-gel is, így CEB egyenlő szárú háromszög (*1 pont*). Mivel $MCK\sphericalangle$ pótszöge a $BAC\sphericalangle$-nek, továbbá $CKB\sphericalangle$ pótszöge a $BAC\sphericalangle$-gel egyenlő $CBK\sphericalangle$-nek, ezért $KCE\sphericalangle = CKE\sphericalangle$, ahonnan $CE = EK$ és így $KE = EB$ (*1 pont*).

2. feladat (*5 pont*):

A lóverseny döntőjébe, amit körpályán bonyolítottak, Attila, Béla és Vajk jutott. Minden egyes kört Attila 2 perccel hamarabb tett meg, mint Béla, és Béla 3 perccel hamarabb, mint Vajk. Amikor Attila megnyerte a versenyt, Béla pontosan 1 körrel, Vajk pedig 2 körrel tett meg kevesebbet Attilánál. Hány körből állhatott a lóverseny döntője?

Megoldás:

Jelölje n az Attila által megtett körök számát (vagyis a feladat kérdését), t pedig azt az időt percben kifejezve, amennyi alatt Attila egy kört megtett. Ekkor a verseny $t \cdot n$ percig tartott (*1 pont*). Mivel Béla ez idő alatt $n-1$ kört tett meg, minden kört $t+2$ perc alatt, Vajk pedig $n-2$ kört, körönként $t+5$ perc alatt (*1 pont*), ezért: $\begin{cases} t \cdot n = (t+2)\cdot(n-1) \\ t \cdot n = (t+5)\cdot(n-2) \end{cases}$ (*1 pont*), ahonnan $\begin{cases} tn = tn + 2n - t - 2 \\ tn = tn + 5n - 2t - 10 \end{cases}$, és így az első egyenletből $t = 2n-2$, amelyet a másodikba helyettesítve $5n - 2(2n-2) - 10 = 0$.

Tovább alakítva $5n - 4n + 4 - 10 = 0$, ahonnan $n = 6$. Ekkor $t = 2n - 2 = 2 \cdot 6 - 2 = 10$. (*1 pont*)
Ezt ellenőrizve, valóban 6 körből állt a lóverseny döntője (*1 pont*).

3. feladat (*3 pont*):

Két csapat 10 sportágban mérte össze a tudását. A győzelemért 4, a döntetlenért 2, a vereségért 1 pontot kaptak. Hány döntetlen lehetett, ha a két csapatnak összesen 46 pontja lett?

Megoldás:

A két csapat döntetlennél 4 pontot, a többi esetben 5 pontot gyűjtött (*1 pont*). Ha mindig 5 pontot gyűjtöttek volna, összesen 50 pontjuk lenne a végén, de 46 van, így 4 sportágban egy-egy ponttal kevesebbet szereztek együtt, ezért 4 döntetlen lett (*2 pont*).