BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2014. NOVEMBER 22.)

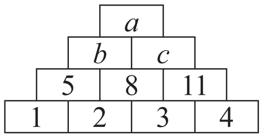
FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

3. osztály

1. feladat (*2 pont*):
Panna és Anna boltosat játszanak. Kétféle játékpénzt készítettek elő: 2 garast érőt és 5 garast érőt. Mindkettőjüknek van bőven mindkét fajta pénzből. Anna kételkedik, hogy vásárlóként minden egész értékű garast ki tud fizetni. Panna, a boltos, biztatja Annát, a vásárlót, hogy próbálja ki, nem lesz semmi gond. Vajon kinek lesz igaza? Miért?

Megoldás:
Pannának lesz igaza. Az 1 garast kifizethetjük úgy, hogy 3 darab 2 garasost adunk és 1 darab 5 garasost visszakapunk (*1 pont*). Minden egész szám az 1 többszöröse, így minden egész érték kifizethető (*1 pont*). (Másképpen: $1=3\cdot 2-5$, $2=2$, $3=5-2$, $4=2+2$, $5=5$ stb.)

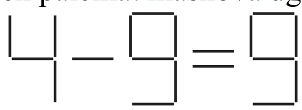
2. feladat (*5 pont*):
Az ábrán látható módon számpiramist kezdtünk építeni. Keressétek meg, milyen szabály szerint építkezhetünk, és írjátok a betűk helyére a megfelelő számokat! Mennyi lehet *a* értéke?



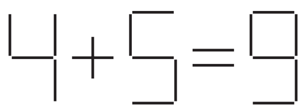
Megoldás:
A megadott számok között többféle összefüggés is megfogalmazható, például a következők:
1. Minden szám (az alsó sor kivételével) a balra közvetlen alatta lévő számnak és a jobbra közvetlen alatta lévő szám kétszeresének az összege: $5=1+2\cdot 2$, $8=2+2\cdot 3$, $11=3+2\cdot 4$.
   Így $b=5+2\cdot 8=21$, $c=8+2\cdot 11=30$ és $a=21+2\cdot 30=81$.
2. Minden számot úgy kapunk (az alsó sor kivételével), hogy a balra közvetlen alatta lévő szám és a jobbra közvetlen alatta lévő szám összegéhez először 2-t, majd (jobbra, illetve felfelé haladva) 2-nél mindig eggyel nagyobb számot adunk: $5=1+2+2$, $8=2+3+3$, $11=3+4+4$.
   Így $b=5+8+5=18$, $c=8+11+6=25$ és $a=18+25+7=50$.

Annak felismerése, hogy több összefüggés is létezik, 1 pontot ér. Minden helyes felismert összefüggés 1 pontot, a helyesen meghatározott a értéke újabb 1 pontot ér. (Természetesen a fentiektől különböző helyes megoldások is elfogadhatók.) Legfeljebb 2 eltérő összefüggés felismerése pontozható.

3. feladat (*3 pont*):
Helyezzetek át az alábbi állításban egyetlen pálcikát máshová úgy, hogy igaz egyenlőséget kapjunk!



Megoldás:



A helyes egyenlőségért *3 pont* jár.

BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2014. NOVEMBER 22.)

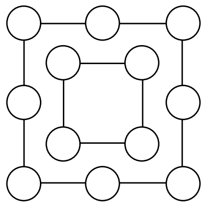
FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

4. osztály

1. feladat (*2 pont*):
Állítsátok elő a 30-at először három, majd utána négy azonos számjegy, valamint műveleti jelek (összeadás, kivonás, szorzás, osztás) segítségével!

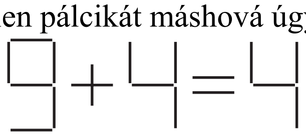
Megoldás:
Néhány lehetséges megoldás (elegendő mindkét esetre egy-egy jó megoldást adni):
$30 = 5 \cdot 5 + 5 = 6 \cdot 6 - 6 = 33 - 3$ *(1 pont)*.
$30 = 3 \cdot 3 \cdot 3 + 3 = 55 - 5 \cdot 5 = 66 - 6 \cdot 6$ *(1 pont)*.

2. feladat (*5 pont*):
Helyezzétek el az ábra köreiben az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 és 12 számokat úgy, hogy a külső nyolc körben lévő számok összege ötször annyi legyen, mint a belső négy körben lévő számok összege! (A számok mindegyikét pontosan egyszer fel kell használni.) Mely számok kerülhetnek a belső négy körbe?

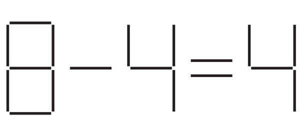


Megoldás:
1-től 12-ig a számok összege 78 (*1 pont*). Mivel a külső nyolc körben ötször annyi a számok összege, mint a belső négy körben, ezért belül a számok összege $78 : 6 = 13$ (*1 pont*).
Mivel $13 = 1 + 2 + 3 + 7 = 1 + 2 + 4 + 6 = 1 + 3 + 4 + 5$, ezért vagy az 1, 2, 3, 7 (*1 pont*), vagy az 1, 2, 4, 6 (*1 pont*), vagy az 1, 3, 4, 5 (*1 pont*) számnégyes kerülhet a belső körökbe.

3. feladat (*3 pont*):
Helyezzetek át az alábbi állításban egyetlen pálcikát máshová úgy, hogy igaz egyenlőséget kapjunk!



Megoldás:



A helyes egyenlőségért *3 pont* jár.

BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2014. NOVEMBER 22.)

FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

5. osztály

1. feladat (*2 pont*):
Karcsi a folyóparton áll két agyagkorsóval. Az egyikről tudja, hogy 5 literes, a másikról nem emlékszik pontosan, hogy 3 vagy 4 literes. Segítsetek Karcsinak becslés nélkül kideríteni a második korsó űrtartalmát! (Más edény nem áll rendelkezésére, és ha belenéz a korsóba, nem látja, hogy pontosan mennyi víz van benne.)

Megoldás:
A következő eljárással például kideríthető a kérdés: Karcsi a kisebbik (teletöltött) korsóból kétszeri töltéssel teletölti a nagyot, majd kiönti a nagy korsóból az 5 liter vizet, a kicsiben pedig megtartja, ami benne maradt (*1 pont*). Ezután a kicsiben megmaradó 1 vagy 3 liter vizet beletölti a nagyba. Amikor harmadszor is tölt a (teletöltött) kicsiből a nagyba, választ kap a kérdésre: hogyha túlcsordul az 5 literes korsó, akkor a kicsi 4 literes volt, ha nem csordul túl (tehát belefér a vízmennyiség), akkor a kicsi 3 literes volt (*1 pont*).

2. feladat (*5 pont*):
A Sárkányos Rend vitéze aranyat adott hat fiának. Az első fiú megkapta az aranyak egyhatod részét, a második a maradék egyötöd részét, a harmadik a maradék egynegyed részét, a negyedik a maradék egyharmad részét, az ötödik a maradék felét, a hatodik pedig a megmaradt 5 aranyat. Hány aranyat kaptak külön-külön a fiúk?

Megoldás:
Visszafelé gondolkodva: az ötödik fiú is 5 aranyat kapott, mert a maradék fele 5 arany volt (*1 pont*). A negyedik fiú is 5 aranyat kapott, mert a kétharmad rész 10 arany volt, ezért az egyharmad rész feleannyi (*1 pont*). A harmadik fiú is 5 aranyat kapott, mert a háromnegyed rész 15 arany volt, ezért az egynegyed rész harmadannyi (*1 pont*). Hasonlóan a második és az első fiú is 5-5 aranyat kapott, mert a négyötöd rész 20 arany, az öthatod rész pedig 25 arany volt (*2 pont*).

3. feladat (*3 pont*):
Legalább hány szelvényt kell kitöltenünk a biztos telitalálathoz, ha olyan lottón játszunk, amelyen 6 számból kettőt húznak ki? (Egy szelvény akkor számít kitöltöttnek, ha a rajta lévő 6 számból kettőt megjelöltünk.)

1	2	3
4	5	6

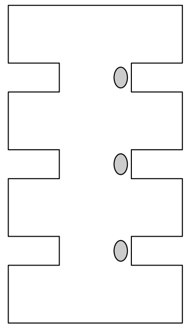
Megoldás:
Mivel a két szám kitöltésének sorrendje nem számít (*1 pont*), ezért az 1-et 5 másik számmal, a 2-t már csak 4 másikkal, a 3-at 3 másikkal, a 4-et 2 másikkal, az 5-öt pedig 1 másikkal lehet kihúzni (*1 pont*), ezért legalább $5+4+3+2+1=15$ szelvényt kell kitölteni a biztos telitalálathoz (*1 pont*).
Az összes lehetséges számpár (1-2, 1-3, 1-4, 1-5, 1-6, 2-3, 2-4, 2-5, 2-6, 3-4, 3-5, 3-6, 4-5, 4-6, 5-6) felsorolásáért 2 pont, a szelvények számának helyes összeszámolásáért 1 pont adható.

BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2014. NOVEMBER 22.)

FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

6. osztály

1. feladat (*2 pont*):



János úgy döntött, hogy bezárja a Vasorrú Bábát egy olyan egyenes folyosóra, amelyet 3 átjáró 4 helyiségre oszt. A folyosón minden átjáróban a falhoz támaszkodva áll egy fáradt, kövér őr. Minden alkalommal, amikor a Vasorrú Bába áthalad az egyik helyiségből a szomszéd helyiségbe, az átjáróban lévő őr átmegy az átjáró túlsó falához támaszkodni. Ha valamelyik pillanatban minden őr ugyanazon az oldalon lévő falhoz támaszkodna, akkor az a fal nem bírná el ezt a nyomást, és összeomlana, így a Vasorrú Bába ki tudna szabadulni. Képes-e János úgy elhelyezni az őröket és a Vasorrú Bábát, hogy az sehogy se tudjon kiszabadulni?

Megoldás:
Igen, képes. Például ha a Vasorrú Bábát a legfelső szobába helyezi, az őröket pedig a falakhoz fentről lefelé bal-jobb-bal (b-j-b) oldalra állítja (*1 pont*). Ekkor akárhogy is jár a Vasorrú Bába, az őrök sosem támaszkodnak mindhárman ugyanahhoz a falhoz. Ugyanis azok az őrök, akik lentebb vannak a Vasorrú Bábától, a saját eredeti helyükön maradnak, csak a Vasorrú Bábától fentebb álló őrök helye változik. Így az őrök helyzete csak b-j-b, j-j-b, j-b-b és j-b-j lehet aszerint, hogy a Vasorrú Bába felülről számítva éppen hányadik helységben tartózkodik (*1 pont*).

2. feladat (*5 pont*):
1 cm^3 térfogatú kockákból 6 cm^2 alapterületű téglatestet építettünk. Lehet-e az így kapott téglatest felszíne 2014 cm^2?

Megoldás:
A keresett téglatestben az oldallapok területének összege $2014-2\cdot 6=2002\ \text{cm}^2$ (*1 pont*). Az alaplap 1×6 cm-es vagy 2×3 cm-es lehet (*1 pont*), így az alaplap kerülete 14 cm vagy 10 cm (*1 pont*). Mivel $2002=14\cdot 143$ (*1 pont*), így a 2002 osztható 14-gyel, ezért a téglatest felszíne lehet 2014 cm^2, mégpedig akkor, ha 1×6×143 cm-es (*1 pont*).

3. feladat (*3 pont*):
Mennyi a következő műveletsor eredménye?

$$\frac{\left(5-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(5+\frac{2}{3}\right)\cdot\left(3\frac{1}{2}-\frac{14}{4}\right)}{20\cdot\left(\frac{2}{5}+\frac{7}{10}\right)}$$

Megoldás:
A számláló utolsó tényezőjében a két tört értéke azonos, így ennek a zárójelnek 0 az értéke (*1 pont*). A számláló tehát 0, a nevező értéke pedig nem 0 (*1 pont*), így a műveletsor értelmes, eredménye 0 (*1 pont*).

BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2014. NOVEMBER 22.)

FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

7. osztály

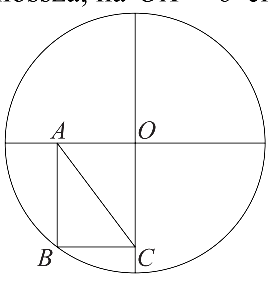
1. feladat (*2 pont*):
Adjátok össze a lehető legtöbb, egymástól különböző pozitív egész számot úgy, hogy az összegük 2014 legyen!

Megoldás:
Akkor tudjuk a lehető legtöbb számot összeadni, ha a lehető legkisebbeket választjuk.
$1+2+3+...+62=1953$ és $1+2+3+...+62+63=2016$ (*1 pont*). Mivel $2016-2014=2$, ezért ha az utóbbiból elhagyjuk a 2-est, megkapjuk a keresett előállítást: $1+3+4+5+...+63=2014$ (*1 pont*), amely 62 pozitív egész szám összege.

2. feladat (*5 pont*):
Fösvény lovag az aranytallérjait 6 ládában tárolja, ládánként nem feltétlenül egyforma mennyiségben. Egyszer a tallérok átszámolása közben észrevette, hogy ha bármelyik két ládát kinyitja, akkor az ezekben együttesen lévő összes aranytallért két egyenlő részre tudja osztani. Sőt, ha bármelyik 3, 4, illetve 5 ládát kinyitja, akkor a nyitva lévő ládák összes aranytallérját szintén el tudja osztani rendre 3, 4, illetve 5 egyenlő részre. Ebben a pillanatban kopogtattak. Fösvény lovag megijedt, így azt már nem tudta kideríteni, hogy a 6 láda együttes tartalmát szét lehet-e osztani 6 egyenlő részre. Lehet-e erre pontos választ adni anélkül, hogy belelátnánk a féltve őrzött ládákba?

Megoldás:
Osszuk fel a ládákat 3 párra (*1 pont*). Mindegyik pár ládában összesen páros számú aranytallér van, így a 6 ládában együttesen is páros a tallérok száma (*1 pont*).
Most osszuk fel a ládákat két hármas csoportra (*1 pont*). A tallérok száma mindkét csoportban osztható 3-mal, ezért a 6 ládában együttesen lévő tallérok száma is osztható 3-mal (*1 pont*).
Mivel az összes tallér száma osztható 2-vel és 3-mal is, ezért osztható 6-tal is. Tehát biztosan szét lehet osztani a 6 láda aranytallérjait 6 egyenlő részre is (*1 pont*).

3. feladat (*3 pont*):
A 10 cm sugarú, *O* középpontú körben *AB*, illetve *BC* párhuzamos a berajzolt és egymásra merőleges sugarakkal. Mekkora lehet az *AC* szakasz hossza, ha $OA=6$ cm?



Megoldás:
Mivel *OABC* téglalap (*1 pont*), ezért átlói egyenlő hosszúak (*1 pont*). Így $AC=OB$, de *OB* sugár, ezért $AC=10$ cm (*1 pont*).

BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2014. NOVEMBER 22.)

FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

8. osztály

1. feladat (*2 pont*):
A Varázslóképzőben ezt tanítják: „Írjatok a TELEFONKERESŐ szóban a különböző betűk helyére különböző, az azonos betűk helyére azonos számjegyet! Ha az így leírt szám prímszám lesz, a világ összes telefonja egyszerre megcsörren.” Meg lehet-e így csörrenteni egyszerre a világ összes telefonját?

Megoldás:
Az E betű négyszer, a további 9 betű mindegyike egyszer-egyszer szerepel a szóban. Tehát a keresett kitöltésben mind a 10 számjegynek szerepelnie kell egyszer, és valamelyiknek még további 3-szor. (*1 pont*). A 10 számjegy összege 45, ha ehhez hozzáadjuk még a 3 azonos számjegyet, akkor a számjegyek összege biztosan 3-mal osztható lesz, így maga a szám is. De ez a szám nagyobb 3-nál, így nem lehet prímszám. Tehát nem lehet így megcsörrenteni egyszerre a világ összes telefonját (*1 pont*).

2. feladat (*5 pont*):
Egy szabályos hatszög és egy szabályos háromszög kerülete egyenlő. Mekkora a hatszög és a háromszög területének aránya?

Megoldás:
Ha a szabályos hatszög oldalának hossza x, akkor a kerülete $6x$, de ugyanennyi a szabályos háromszög kerülete is, így annak oldala $2x$ hosszúságú. (*2 pont*). A szabályos hatszög 6 darab x oldalú szabályos háromszögre, míg a szabályos háromszög 4 darab ilyen háromszögre bontható (*2 pont*). Így a hatszög és a háromszög területének aránya $\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$ (*1 pont*).

3. feladat (*3 pont*):
Igaz-e, hogy a 98765416 és a 98765425 két szomszédos négyzetszám? Állításotokat indokoljátok!

Megoldás:
Nem igaz (*1 pont*). A szomszédos négyzetszámok különbsége a legkisebbektől (0, 1, 4 stb.) kezdve rendre 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, … (*1 pont*). A vizsgált két szám közöttt a különbség 9. Ez a különbség szomszédos négyzetszámok között csak a 16 és a 25 esetében fordul elő (*1 pont*). (Minél nagyobbak a négyzetszámok, annál nagyobb a szomszédosak közötti különbség, hiszen $(n+1)^2-n^2=2n+1$.)
Az is elfogadható, ha a csapat igazolja, hogy a két szám valamelyike nem is négyzetszám.