BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2013. NOVEMBER 23.)

FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

3. osztály

1. feladat (*2 pont*):
Egy asztal körül 24-en ülnek, mindannyian mindig igazat mondanak. Minden lány azt mondja, hogy „a közvetlen szomszédjaim közül pontosan az egyik fiú”, és minden fiú azt mondja, hogy „mindkét közvetlen szomszédom lány”. Hány fiú és hány lány ül az asztal körül?

Megoldás:
Ez az eset csak úgy valósulhat meg, ha az asztal körül sorban 1 fiú, 2 lány, 1 fiú, 2 lány, … ül, és így tovább, ez összesen 8-szor ismétlődik meg (*1 pont*). Így 8 fiú és 16 lány ül az asztal körül (*1 pont*).

2. feladat (*5 pont*):
Töltsétek ki az ábra első, harmadik és ötödik sorát, valamint első és utolsó oszlopát úgy, hogy a számok egy-egy soron és oszlopon belül mindig ugyanannyival növekedjenek! (A különböző sorokban és oszlopokban lehet más-más a növekedés mértéke.) Melyik szám kerül az *a* betű helyére?

0	2			
5				
10		*a*		
15				
20			32	

Megoldás:
Az első sorban 2-esével nőnek a számok, így azok sorban:0, 2, 4, 6, 8 (*1 pont*).
Az utolsó sorban a következőt láthatjuk: 20 → __ → __ → 32 → __. A 20-tól háromszor kell ugyanannyival növelnünk ahhoz, hogy 32-ig jussunk, vagyis a növekedés $12:3=4$-esével történik, így ennek a sornak a számai: 20, 24, 28, 32, 36 (*1 pont*).
Most megállapíthatjuk az utolsó oszlop számait, ugyanis a 8-tól kell négyszeri azonos növeléssel 36-ig jutni. Ez a növelés így $(36-8):4=7$-esével történik, tehát a számok rendre: 8, 15, 22, 29, 36 (*1 pont*).
A harmadik sorban a 10-től kell a 22-ig eljutni négyszeri azonos növeléssel. Ez úgy lehetséges, hogy mindig $12:4=3$-mal növelünk, és a számok: 10, 13, 16, 19, 22 lesznek (*1 pont*). Így $a=16$ (*1 pont*).

3. feladat (*3 pont*):
Egy utcában a házszámok felírásához 57 számjegyet használtak fel. (A házakat 1-től kezdve, egyesével számozták.) Hány ház lehet az utcában összesen, ha mindkét oldalon legalább 5 ház van?

Megoldás:
A páros oldalon biztosan szerepel a 2, 4, 6, 8, a páratlanon pedig az 1, 3, 5, 7, 9 (*1 pont*), így a többi házszám kétjegyű. A kétjegyű házszámokhoz $57-9=48$ számjegyet használtak, ezért ilyen házból összesen $48:2=24$ létezik. (*1 pont*) Tehát az utcában $9+24=33$ ház van (*1 pont*).

BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2013. NOVEMBER 23.)

FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

4. osztály

1. feladat (*2 pont*):
A táltos paripa a palotától a jéghegyig úgy szállt, mint a gondolat, és úgy tért vissza, mint a szél. Ez így 8 percig tartott. Ha mindkét irányban úgy haladna, mint a szél, az összesen 14 percet venne igénybe. Menynyi ideig tartana ez az út oda-vissza, ha mindkét irányban úgy szállna, mint a gondolat?

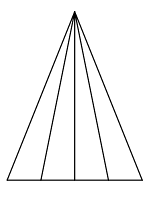
Megoldás:
Ha a paripa a széllel száll, 14 perc az út oda-vissza, így csak az egyik irányban a széllel 7 percig tart az út (*1 pont*). Mivel ha a paripa az egyik irányban úgy száll, mint a gondolat, és a másik irányban úgy, mint a szél, az 8 percig tart, így csak az egyik irányban a gondolattal 1 perc alatt jut el. Tehát oda vissza 2 perc alatt teszi meg az utat, ha mindkét irányban úgy száll, mint a gondolat (*1 pont*).

2. feladat (*5 pont*):
Egy székely kapura a fafaragó más-más árat kért egy magánhangzó, illetve egy mássalhangzó bevéséséért. (A különböző magánhangzók bevésése ugyanannyiba kerül, illetve a különböző mássalhangzóké is.) Ha az ANNA névért 500 Ft-ot, az ANDRÁS névért pedig 800 Ft-ot kért, akkor mennyibe került a ZSUZSANNA név bevésése? (A ZS betű két mássalhangzó bevésését jelenti.)

Megoldás:
Az András név 2 mássalhangzóval több az Anna név betűinél, így $800-500=300$ Ft az ára 2 mássalhangzónak (*1 pont*). Tehát 1 mássalhangzó ára 150 Ft (*1 pont*). Az Anna névből megállapítható, hogy két magánhangzó ára $500-300=200$ Ft (*1 pont*), vagyis 1 magánhangzóé 100 Ft (*1 pont*). Így a Zsuzsanna nevet $3\cdot 100+6\cdot 150=1200$ Ft-ért véste be a fafaragó (*1 pont*).

Második megoldás:
Az András név 2 magánhangzóból és 4 mássalhangzóból áll, és ez 800 Ft-ba kerül (*1 pont*), így feleennyi betű, azaz 1 magánhangzó és 2 mássalhangzó bevésése 400 Ft-ba kerül (*2 pont*). Ebből megállapíthatjuk, hogy háromszor ennyi betű, azaz 3 magánhangzó és 6 mássalhangzó (amennyiből a Zsuzsanna név áll) bevésése $3\cdot 400=1200$ Ft-ba kerül (*2 pont*).
Ha valamelyik csapat ez utóbbi módszerrel oldja meg a feladatot, az figyelembe vehető a bemutatás minőségének értékelésénél, hiszen ez elmésebb megoldás az elsőnél.

3. feladat (*3 pont*):
Összesen hány háromszög látható az ábrán?



Megoldás:
4 olyan háromszög van, amelyiknek az alapja 1 egységnyi hosszú, és 1 olyan, amelyiknek az alapja 4 egységnyi (*1 pont*). 3 háromszög alapja 2 egységnyi (*1 pont*), és 2 háromszög alapja 3 egységnyi, így összesen $4+3+2+1=10$ db háromszög látható az ábrán (*1 pont*).

BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2013. NOVEMBER 23.)

FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

5. osztály

1. feladat (*2 pont*):
Van két éghető zsinegünk, amelyeket ha az egyik végükön meggyújtunk, egyenként 1 óra alatt égnek végig, viszont az égésük nem egyenletes (tehát hol lassabban, hol gyorsabban égnek, és egymáshoz képest is különböző az égésük ritmusa). Hogyan mérhetünk ki ezek segítségével 45 percet? (Tetszőleges mennyiségű gyufa a rendelkezésünkre áll.)

Megoldás:
Először egyszerre meggyújtjuk az egyik zsineget mindkét végén, valamint a másikat az egyik végén (*1 pont*). Amikor a mindkét végén meggyújtott zsineg lángja összeér és teljesen leég, 30 perc telt el. Eddigre a másik kötélből is 30 percnyi égett el, amelynek most meggyújtjuk a másik végét is. Így ez a kötél mindkét végén égni fog, és innentől 15 perc alatt ég le. Ez a kezdettől számítva összesen $30+15=45$ perc (*1 pont*).

2. feladat (*5 pont*):
Fel lehet-e osztani az 1, 2, 3, 4, 5 számokat két csoportba úgy, hogy az egy csoportba kerülő számok közül semelyik kettő különbsége ne szerepeljen ebben a csoportban? Ha igen, hogyan? Ha nem, miért nem?

Megoldás:
A megadott számok nem oszthatók a feltételeknek megfelelő két csoportba (*1 pont*).
A 2 és a 4 biztosan nem kerülhetnek egy csoportba, mert $4-2=2$, tehát ha megpróbáljuk a számokat szétosztani, akkor ezek különböző csoportban lesznek. Az 1 nem kerülhet a 2-höz, mert $2-1=1$, így az 1 csak a 4 csoportjába tehető (*2 pont*). Tehát jelenleg a két csoport a következő:

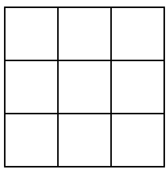
I. csoport: 4, 1 II. csoport: 2

A 3 nem tehető az I. csoportba, mert $4-1=3$, így csak a II. csoportba tehető:

I. csoport: 4, 1 II. csoport: 2, 3

Ezután az 5-öt kellene elhelyeznünk, de az I. csoportba nem kerülhet, mert $5-4=1$, és a II. csoportba sem kerülhet, mert $5-3=2$ (*2 pont*). Tehát valóban nem lehetséges a felosztás.
Más helyes indoklás a fentiekkel arányosan pontozandó.

3. feladat (*3 pont*):
Összesen hány négyzet látható az ábrán?



Megoldás:
9 olyan négyzet van, amelyiknek az oldala 1 egységnyi hosszú (*1 pont*). 4 négyzet oldala 2 egységnyi (*1 pont*), és 1 négyzet oldala 3 egységnyi, így összesen $9+4+1=14$ db négyzet látható az ábrán (*1 pont*).

BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2013. NOVEMBER 23.)

FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

6. osztály

1. feladat (*2 pont*):
Katinak a takarékszövetkezetben 1000 forint volt a számláján. Ezután hatszor vett ki pénzt, összesen 1000 forintot. Megtartotta a bizonylatokat a kivétekről és a számlán maradó egyenlegekről is, ahogy a mellékelt két oszlopban olvasható.
Amikor a mellékelt számítás szerint összeadta az oszlopokat, azt gondolta, hogy 10 forinttal tartozik a takarékszövetkezetnek. Igaza volt-e? Válaszotokat indokoljátok!

Kivét	Maradó egyenleg
500 Ft	500 Ft
250 Ft	250 Ft
100 Ft	150 Ft
80 Ft	70 Ft
50 Ft	20 Ft
20 Ft	0 Ft
1000 Ft	990 Ft

Megoldás:
Semmilyen ok sincs, amiért a két oszlop összegének meg kellene egyeznie (*1 pont*). Például a mellékelt kivétek esetén a második oszlopban lévő számok összege nagyobb is lehet, mint az első oszlopban lévőké.

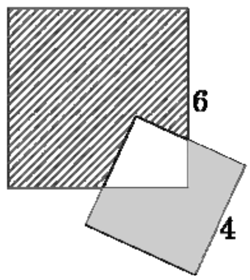
Ehhez hasonló érv vagy bármilyen más jó megvilágítás *1 pont*.

Kivét	Maradó egyenleg
100 Ft	900 Ft
200 Ft	700 Ft
700 Ft	0 Ft
1000 Ft	1600 Ft

2. feladat (*5 pont*):
Egy táblára felírták az egész számokat 1-től 1000-ig (mindegyiket pontosan egyszer). Anna és Béla felváltva törölnek le egy-egy számot úgy, hogy Anna kezd. Az veszít, aki először töröl le olyan számot, amelyik többszöröse 2-nek vagy 5-nek. Ki nyer, ha mindketten kellően okosan játszanak?

Megoldás:
A felírt számok közül a 2 többszörösei: $1\cdot 2,\ 2\cdot 2,\ 3\cdot 2,\ ...,\ 500\cdot 2$, ez összesen 500 szám (*1 pont*). Az 5 többszörösei: $1\cdot 5,\ 2\cdot 5,\ 3\cdot 5,\ ...,\ 200\cdot 5$, ez összesen 200 szám (*1 pont*), de ezek közül minden második páros, amelyeket a 2 többszöröseinél már összeszámoltunk (*1 pont*). Így a „rossz” számok száma $500+(200-100)=600$, vagyis $1000-600=400$ olyan szám van, amelynek letörlésével még nem veszít a soron következő játékos (*1 pont*). Tehát ha mindketten kellően okosan játszanak, akkor a 401. törlés lesz a vesztes lépés, amely a kezdőé, így a játékot Béla fogja nyerni (*1 pont*).

3. feladat (*3 pont*):
Az ábrán lévő négyzetek oldalhossza 6 cm, illetve 4 cm. Hány cm^2-rel nagyobb a vonalkázott terület nagysága a szürke terület nagyságánál?



Megoldás:
Ha T a vonalkázott, t a szürke és x a fehér (a közös) terület nagysága, akkor teljesül a következő: $(T+x)-(t+x)=T+x-t-x=T-t$ (*2 pont*).

Tudjuk, hogy $(T+x)-(t+x)=36-16=20$ cm^2, így a vonalkázott terület 20 cm^2-rel nagyobb a szürke területnél (*1 pont*).

BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2013. NOVEMBER 23.)

FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

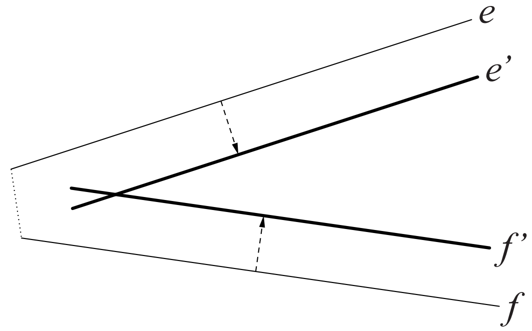
7. osztály

1. feladat (*2 pont*):
El lehet-e rendezni az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 számokat egyetlen sorban úgy, hogy bármely négy egymás mellé írt szám összege osztható legyen 3-mal?

Megoldás:
Nem lehet elrendezni. Ha sikerülne, akkor négyesével csoportosítva mindegyik csoportban a számok összege osztható lenne 3-mal (*1 pont*), így a teljes összegnek is 3-mal oszthatónak kellene lennie. De a számok összege $1+2+3+...+16=136$, amely nem osztható 3-mal (*1 pont*).

2. feladat (*5 pont*):
Hogyan szerkeszthető meg egy olyan szög belső szögfelezője, amelynek csúcsa leszakadt a papírról?

Megoldás:
A feladat többféleképpen is megoldható. Egy lehetséges megoldás a következő:



1. lépés: Az adott e és f szögszárra egy-egy pontjukban merőlegest állítunk.
2. lépés: Mindkét merőlegesre felmérünk egy-egy ugyanakkora távolságot befelé.
3. lépés: A két szárat párhuzamosan eltoljuk a felmért távolságra, e' és f' helyzetbe. (A 2. lépésben a távolságot úgy kell megválasztani, hogy e' és f' találkozzon.)
4. lépés: Megszerkesztjük e' és f' belső szögfelezőjét.
5. lépés: Ennek meghosszabbítása lesz az eredeti szög belső szögfelezője, mert ennek minden pontja azonos távolságra van az eredeti két szögszártól.

Lépésenként 1-1 pont adható. Eltérő szerkesztés esetén arányosan osztandó el az 5 pont.

3. feladat (*3 pont*):
Összeszoroztuk a pozitív egész számokat 1-től 200-ig. Hány nulla áll a szorzat végén?

Megoldás:
A szorzat annyi nullára fog végződni, ahány $2\cdot 5$-ös részszorzatot találunk benne. Mivel 5-ös prímtényezőből van kevesebb, ezért elegendő ezeket összeszámolni (*1 pont*). 5-ös prímtényező $200:5=40$ számban található, ezek közül $200:25=8$ tartalmaz még egy második 5-öst is, illetve $200:125=1$ (maradék: 75) tartalmaz még egy harmadik 5-ös tényezőt (*1 pont*). Így $40+8+1=49$ nullára végződik a szorzat (*1 pont*).

BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2013. NOVEMBER 23.)

FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

8. osztály

1. feladat (*2 pont*):
Adott egy egyenesen egy rögzített *P* pont és egy mozgó *M* pont. Legyen *PM* felezőpontja *F*. Amikor az *M* pont mozgása közben az *M’* helyzetbe kerül, a *PM’* felezőpontját jelöljük *F’*-vel. Milyen összefüggés áll fenn *MM’* és *FF’* hosszúságai között? Válaszotokat indokoljátok!

Megoldás:
Tekintsük az egyenest egy olyan számegyenesnek, amelyen a *P* pontnak a 0 felel meg. Jelölje az *F* pont helyét a számegyenesen *x*, az *F’* pont helyét pedig *y* (ahol *x* és *y* értéke tetszőleges valós szám lehet). Ekkor *M* a számegyenes $2x$ pontjában, *M’* pedig a $2y$ pontjában található (*1 pont*).
Az *MM’* szakasz hossza a számegyenesen *M’* és *M* által jelölt számok különbségének abszolútértéke, vagyis $MM'=|2y-2x|=2\cdot|y-x|$. Hasonlóan az *FF’* szakasz hossza a számegyenesen *F’* és *F* által jelölt számok különbségének abszolútértéke, tehát $FF'=|y-x|$. Ez alapján $MM'=2\cdot FF'$ (*1 pont*).

2. feladat (*5 pont*):
Mutassátok meg, hogy az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 számok egymás mellé írhatók úgy egy egyenes mentén, hogy bármely két szomszédos szám összege négyzetszám legyen, de nem lehet őket egy kör kerületére egymás mellé írni úgy, hogy meglegyen ugyanez a tulajdonságuk!

Megoldás:
Egy egyenes mentén az (egyetlen) lehetséges megoldás a 16, 9, 7, 2, 14, 11, 5, 4, 12, 13, 3, 6, 10, 15, 1, 8 sorrend, illetve ennek fordítottja (*2 pont*).
Megmutatjuk, hogy a 16 csak a sor szélén állhat. Legyen a 16 két szomszédja *x* és *y*. Ekkor $16+x$ és $16+y$ két különböző négyzetszám (*2 pont*). A legkisebb érték $16+1=17$, a legnagyobb $16+15=31$ lehet, de 17 és 31 között csak egyetlen négyzetszám található (a 25), ezért a 16-nak nem lehet mindkét szomszédjával vett összege négyzetszám. Mivel a körön minden számnak két szomszédja van, ezért a kör kerületére nem írhatók fel a számok a kívánt módon (*1 pont*).

3. feladat (*3 pont*):
Adott egy 108°-os szög. Hogyan harmadolható el ez a szög csak körzővel és vonalzóval?

Megoldás:
A 108°-os szög kiegészítő szögének nagysága $180°-108°=72°$ (*1 pont*). Meghosszabbítjuk az adott szög egyik szárát, és az így létrejött kiegészítő szögnek megszerkesztjük a szögfelezőjét (*1 pont*). Így $72°:2=36°$-os szöget kapunk. Ez harmada a 108°-nak, vagyis bemásoljuk a 108°-os szög belsejébe a szárakhoz illeszkedően, és ezzel megkaptuk a három 36°-os szöget (*1 pont*).