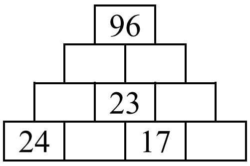
BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2010. NOVEMBER 27.)

FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

3. osztály

1. feladat (*2 pont*):
A mellékelt ábrán két egymás melletti mező számának összege mindig a közvetlen felettük lévő mezőben szerepel. Fejtsétek meg a hiányzó számokat!



Megoldás:
A baloldali három mezőbe tartozó három szám (6, 30, 53) megtalálása (*1 pont*), a jobboldaliba tartozóké (fentről lefelé: 43, 20, 3). (*1 pont*).

2. feladat (*5 pont*):
Egy 8, egy 5 és egy 3 literes edényünk van. A 8 literes edény tele van vízzel, a másik két edény üres. Csak ezek segítségével hogyan tudtok kimérni 1 liter vizet?

Megoldás:
Egy lehetséges megoldás követhető a táblázatban:

8 literes edényben	8	3	3	6	6	1
5 literes edényben	0	5	2	2	0	5
3 literes edényben	0	0	3	0	2	2

Lépésenként *1 pont*; más módszernél arányosan osztandó az 5 pont.

3. feladat (*3 pont*):
Melyik alakzat mennyit ér, ha igazak az egyenlőségek?

○ · ○ + ○ = 12 △ · △ + △ = 30 □ · □ + □ = 56

● · ● – ● = 12 ▲ · ▲ – ▲ = 30 ■ · ■ – ■ = 56

Megoldás:
○ = 3 △ = 5 □ = 7 ● = 4 ▲ = 6 ■ = 8

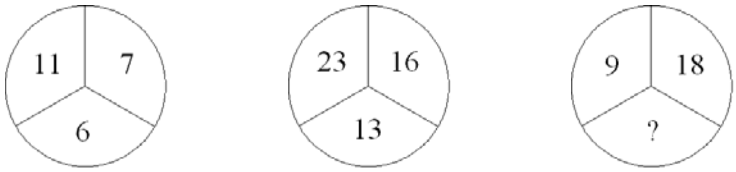
Helyes megoldásonként *0,5 pont*.

BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2010. NOVEMBER 27.)

FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

4. osztály

1. feladat (*2 pont*):
Milyen számot írnátok a kérdőjel helyére? Miért?



Megoldás:
(11 + 7) : 3 = 6 és (23 + 16) : 3 = 13 (*1 pont*).
A kérdőjel helyére (9 + 18) : 3 = 9 kerül (*1 pont*).
Más logikai érvekkel alátámasztott megoldásra is megadható a 2 pont.

2. feladat (*5 pont*):
Alpár, Béla és Csaba matematikai pontversenyt vív egymással. Hányféle végeredménye lehet a versenynek?

Megoldás:
Ha nincs holtverseny, akkor hatféleképpen (*2 pont*). Ha kettős holtverseny van, az lehet az 1-2. helyen háromféleképpen (*1 pont*), vagy a 2-3. helyen szintén háromféleképpen (*1 pont*). Előfordulhat még, hogy hármas holtverseny alakul ki, ez egyféleképpen történhet (*1 pont*). Tehát összesen 13-féle végeredmény lehetett.

3. feladat (*3 pont*):
Az asztalon ezek a számkártyáink vannak: $\boxed{6}$ $\boxed{67}$ $\boxed{24}$ $\boxed{3}$ $\boxed{18}$ $\boxed{150}$.
Legkevesebb hány darab számkártyát kell közülük csukott szemmel kihúzni, hogy a kihúzottak között biztosan legyen

a) páros szám?
b) kétjegyű szám?
c) háromjegyű szám?

Megoldás:
a) Hármat. (*1 pont*)
b) Négyet. (*1 pont*)
c) Hatot. (*1 pont*)

BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2010. NOVEMBER 27.)

FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

5. osztály

1. feladat (*2 pont*):
Kukutyinban egy köteg zab 23 fityingbe kerül. Matyó vásárláskor veszi észre, hogy nála csupa 3 fityingesek, míg az eladónál csak 5 fityingesek vannak. Legkevesebb hány 3 fityingesnek kell Matyónál lennie, hogy kifizethesse a vásárlandó 1 köteg zabot, és a visszajárót is megkaphassa az eladótól?

Megoldás:
23 nem fizethető ki pontosan csupa 3 fityingesekkel, ezért 23-nál több fityinget kell Matyónak átadnia, mégpedig olyan összeget, ami 23-nál 5 többszörösével nagyobb. Ilyenek a 28, 33, 38, …. Ezek közül a 33 a legkisebb, ami osztható 3-mal (*1 pont*). Ekkor ad 11 darab 3 fityingest és visszakap 2 darab 5 fityingest (*1 pont*).

2. feladat (*5 pont*):
Melyik az a legkisebb természetes szám, amelyet ha 2-vel, 3-mal, 4-gyel, 5-tel, illetve 6-tal osztunk, rendre az 1, 2, 3, 4, illetve 5 maradékokat kapjuk?

Megoldás:
A keresett számot 1-gyel növelve, osztható lesz 2, 3, 4, 5 és 6-tal is (*2 pont*). A legkisebb ilyen pozitív egész a 60 (*2 pont*). A keresett szám az 59. (*1 pont*)
Ha próbálgatással találnak rá és igazolást nyer az is, hogy valóban ez a legkisebb, akkor megkapják az 5 pontot (ha csak megtalálják és nem indokolják, miért ez a legkisebb, akkor 3 pont).

3. feladat (*3 pont*):
A szabónak van egy 39 méteres posztódarabja, ebből minden nap levág 3 métert. Hányadik nap vágja le az utolsó darabot?

Megoldás:
12 vágással vágja le az összest, így a 12. napon. (*2 pont*).

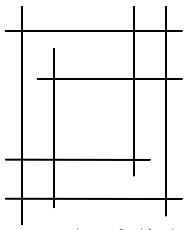
BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2010. NOVEMBER 27.)

FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

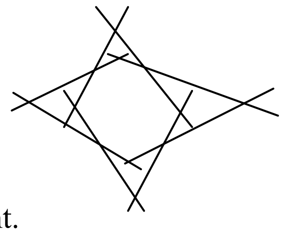
6. osztály

1. feladat (*2 pont*):
Rajzoljatok fel 8 szakaszt úgy, hogy mindegyik 3 másikat metsszen! Adjatok meg két eltérő megoldást!

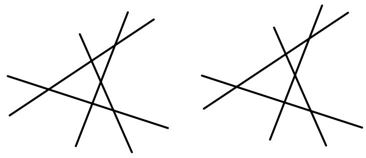
Megoldás:



vagy



vagy



Helyes ábránként *1-1 pont*, legfeljebb 2 pont.

2. feladat (*5 pont*):
Felírhatjuk-e egy kocka éleire az 1, 2, 3, 4, …, 11, 12 számokat úgy, hogy az egy-egy csúcsba befutó három élen levő számok összege ugyanannyi legyen?

Megoldás:
Ha összeadjuk a csúcsokban lévő összegeket, ebben mindegyik szám kétszer szerepel, ezért az eredmény 156 lesz (*2 pont*). Ha viszont mind a 8 csúcsnál egyenlők az összegek, akkor a csúcsokban lévő számok összegének oszthatónak kell lennie nyolccal (*2 pont*), de 156 nem osztható 8-cal. Tehát nem lehetséges. (*1 pont*)

3. feladat (*3 pont*):
Mutassátok meg, hogy három természetes szám közül mindig ki lehet választani kettőt, amelyek összege osztható 2-vel!

Megoldás:
A számok között előfordulhat páros vagy páratlan is (*1 pont*). A három közül kettő biztosan azonos paritású (*2 pont*).

BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2010. NOVEMBER 27.)

FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

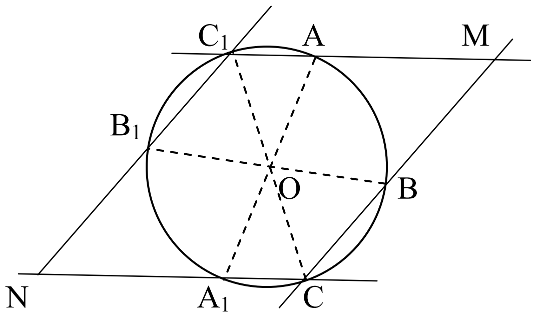
7. osztály

1. feladat (*2 pont*):
Mutassátok meg, hogy ha az $A = 1+2\cdot3+4\cdot5\cdot6+7\cdot8\cdot9\cdot10+11\cdot12\cdot13\cdot14\cdot15+...$ összeg legalább két-tagú, akkor A nem lehet négyzetszám!

Megoldás:
A harmadik tagtól kezdve minden tag 0-ra végződik (*1 pont*), ezért A utolsó számjegye 7. Négyzetszámok utolsó jegye pedig nem lehet 7 (*1 pont*).

2. feladat (*5 pont*):
Az O középpontú kör A, B, C pontjainak átmérősen ellentett pontjai rendre A_1, B_1 és C_1. Ha AC_1 és BC metszéspontja M, valamint A_1C és B_1C_1 metszéspontja N, mutassátok meg, hogy az M, O és N pontok egy egyenesre esnek!

Megoldás:
Az ACA_1C_1 négyszög átlói felezik egymást (mindkét átló a kör átmérője; CC_1 felezőpontja O), ezért paralelogramma (*1 pont*), így szemközti oldalai párhuzamosak. Hasonlóan BCB_1C_1 is paralelogramma, így ennek szemközti oldalai is párhuzamosak (*1 pont*). Eszerint MC_1 párhuzamos NC-vel és hasonlóan MC párhuzamos NC_1-gyel, és így $MCNC_1$ paralelogramma (*1 pont*). Így $MCNC_1$ átlói felezik egymást (*1 pont*), vagyis az MN átló áthalad a CC_1 átló felezőpontján, ami O. Tehát az M, O és N pontok egy egyenesre esnek. (*1 pont*)



3. feladat (*3 pont*):
Páros vagy páratlan az első 100 prímszám összege?

Megoldás:
Egyetlen páros prímszám van, a legelső, ami a 2 (*1 pont*). Egy páros és 99 páratlan szám összegéről van szó (*1 pont*). Ezért az összeg páratlan (*1 pont*).

BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2010. NOVEMBER 27.)

FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

8. osztály

1. feladat (*2 pont*):

Határozzátok meg *x* értékét úgy, hogy az $\overline{1x4}$ és $\overline{4x1}$ számoknak legyen legalább egy, 1-től különböző közös osztójuk!

Megoldás:

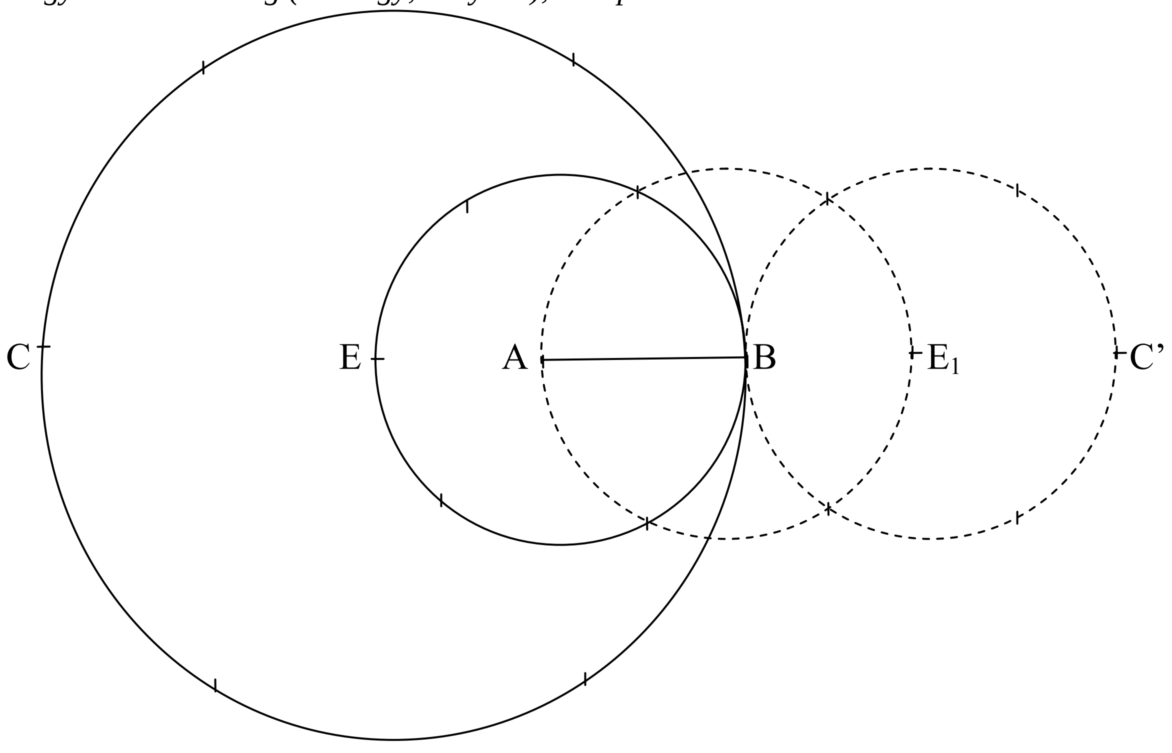
A két szám közös osztója a különbségüknek is osztója. $\overline{4x1} - \overline{1x4} = 400 + 10x + 1 - 100 - 10x - 4 = 297$.
297 osztói: 1, 3, 9, 11, 99, 297 (*1 pont*). A 3, 9 és 11 lehet ezekből csak osztója az $\overline{1x4}$-nek, ez pedig akkor következik be, ha *x* értéke: 1, 4, 5 vagy 7 (*1 pont*).
A 2 pont akkor is megadható, ha módszeres próbálkozással találják meg az összes megoldást. Ha nincs meg mind a négy, akkor csak 1 pont adható (már egy jóért is).

2. feladat (*5 pont*):

Adott egy szakasz két végpontja: *A* és *B*. Csak körző segítségével szerkesszétek meg az *AB* egyenesnek azt a *C* pontját, amelyre $AC = 3 \cdot AB$!

Megoldás:

A középponttal *AB* sugarú körben kilépjük a kör kerületén a szabályos hatszög csúcsait, ezzel megtaláljuk a kör *B*-vel ellentett *E* pontját (*1 pont*). Ezt az eljárást megismételjük *E* középponttal és *EB* sugárral, így megkapjuk a *B*-től *A* irányában lévő *C* pontot (*2 pont*). Azonos elgondolással előbb *B* középponttal *AB* sugarú körben megszerkesztjük az *A*-val ellentett E_1-et, majd ugyanilyen sugarú E_1 középpontú körben *B*-vel ellentett pont lesz a másik *C* pont (*2 pont*).
Ha csak az egyiket keresik meg (mindegy, melyiket), az 3 pont.



3. feladat (*3 pont*):

Egy téglatest alakú medencében a magassága 80 %-áig van víz. Ha ennek a víznek a 20 %-át még kiengedik, a medence magasságának hány %-áig ér a víz?

Megoldás: 20%-át kiengedik, marad a 80%-nak a 80%-a (*2 pont*). Így a 64 %-áig ér a víz. (*1 pont*).