BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
FŐVÁROSI DÖNTŐ – SZÓBELI (2005. NOVEMBER 26.)

MEGOLDÁS ÉS PONTOZÁSI ÚTMUTATÓ

5. osztály

1. feladat:

Jelölje a 20-as és az 50-es közötti számokat a és b, a 20-as és a 80-as közöttieket c és d, az 50-es és a 80-as közöttieket pedig e és f. Ekkor tudjuk, hogy $a+b=130$, $c+d=100$ és $e+f=70$. A 130 kétféleképpen tud előállni kéttagú összegként a megadott számokból: 70+60, illetve 90+40. Az első lehetőségnél a 100 csak 10+90 lehet, a másodiknál pedig csak 30+70. A 70 pedig az első lehetőségnél csak 40+30, a másodiknál csak 10+60 lehet.
Tehát két alapvető megoldás van: $a+b=70+60$, $c+d=10+90$, $e+f=40+30$; illetve $a+b=90+40$, $c+d=30+70$, $e+f=10+60$.

Első jó megoldás: 1 pont
Második, lényegében különböző megoldás: 1 pont

2. feladat:

Mivel a nem zöld golyók száma 27, ezért a piros és a fehér golyók együttes száma 27, hasonló elgondolással a zöld és a fehér golyók együttes száma 39. Mivel zöld golyóból kétszer annyi van, mint pirosból, ezért a piros golyók száma éppen annyi, amennyivel több a 39 a 27-nél, vagyis 12 piros golyó van. Zöld kétszer ennyi, azaz 24. Mivel a piros és fehér golyók száma együtt 27, és a pirosak száma 12, így 15 fehér színű golyó van.
Ellenőrizve: a 12 piros, 15 fehér és 24 zöld golyó valóban teljesíti a feladat feltételeit.

A piros+fehér és zöld+fehér golyók számának meghatározása: 1 pont
Az egyik színű (pl. piros) golyók számának megtalálása: 2 pont
A másik kétféle golyó darabszámainak meghatározása: 1 pont
Ellenőrzés: 1 pont

3. feladat:

Az első tört $\frac{1}{9}$-del, a második $\frac{1}{10}$-del kisebb az egy egésznél. Mivel $\frac{1}{10}<\frac{1}{9}$, ezért a két szám közül a $\frac{9}{10}$ a nagyobbik.

Összehasonlítási módszer megtalálása: 1 pont
Helyes kivitelezés: 2 pont

(A feladatoknál a leírtaktól különböző, de teljes értékű megoldásra is maximális pontszám adandó.)

BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
FŐVÁROSI DÖNTŐ – SZÓBELI (2005. NOVEMBER 26.)

MEGOLDÁS ÉS PONTOZÁSI ÚTMUTATÓ

6. osztály

1. feladat:

Igen, *B* elérheti célját. Ha például a szám jegyeit elölről kettesével csoportosítjuk, *B* mindig el tudja érni, hogy minden ilyen csoportban a két számjegy összege 6 legyen. Így a 6 csoportban a jegyek összege $6 \cdot 6 = 36$, ami osztható 9-cel, ezért maga a 12 jegyű szám is osztható lesz 9-cel.

Jó válasz: 1 pont
A stratégia indoklása: 1 pont

2. feladat:

Egy lehetséges megoldás: $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{36} + \frac{1}{108} + \frac{1}{324} + \frac{1}{648}$.

Jó megoldás: 3 pont
A megoldáshoz vezető lépések indoklása: 2 pont
(Ha csak 3, 4, 5, illetve 6 olyan számot találnak, amelyek reciprokösszege 1, akkor összesen 1, 2, 3, illetve 4 pont adandó.)

3. feladat:

A négyzet területéből kivonjuk a kiegészítő részek területét. Így a vizsgált alakzat területe $9 - 4 \cdot \frac{2 \cdot 1}{2} = 5$ területegység.

A nagy négyzet területének kiszámítása: 1 pont
Egy kiegészítő háromszög területének kiszámítása: 1 pont
Helyes válasz: 1 pont

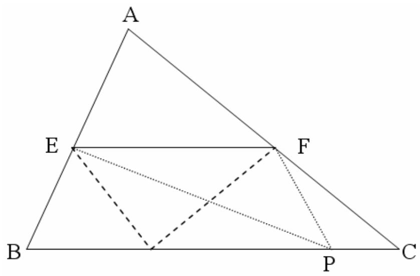
(A feladatoknál a leírtaktól különböző, de teljes értékű megoldásra is maximális pontszám adandó.)

BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
FŐVÁROSI DÖNTŐ – SZÓBELI (2005. NOVEMBER 26.)

MEGOLDÁS ÉS PONTOZÁSI ÚTMUTATÓ

7. osztály

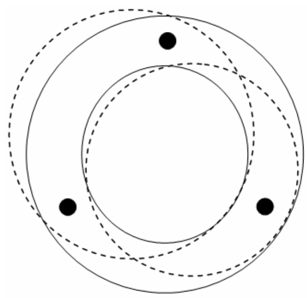
1. feladat:



EF középvonal, így párhuzamos *BC*-vel, ezért az *EF* és a *BC* egyenesek távolsága feleakkora, mint a háromszög *A*-hoz tartozó magasságának hossza. Így az *EFP* háromszög területe állandó, mivel az *EF* alap és az *EF*-hez tartozó magasság is állandó, vagyis mindegy, hogy *P* a *BC* szakasz melyik pontját jelöli.

A középvonal párhuzamosságának észrevétele: 1 pont
A vizsgált terület állandóságának bizonyítása: 1 pont

2. feladat:



8 helyes megoldás van, ezek lényegileg négyféle különböző csoportba sorolhatók:
I. A három pont által meghatározott körrel koncentrikus, annál 5 m-rel kisebb sugarú kör.
II. A három pont által meghatározott körrel koncentrikus, annál 5 m-rel nagyobb sugarú kör.
III. Három olyan kör, amely a három pontból egyet-egyet tartalmaz belsejében (az ábrán szaggatottal).
IV. Három olyan kör, amely a három pontból kettőt-kettőt tartalmaz belsejében (az ábrán szaggatottal).

Megtalált körtípusonként 1-1 pont
Ha rájönnek, hogy összesen 8 megoldás van: 1 pont

3. feladat:

Nem igaz. A szomszédos négyzetszámok különbsége a legkisebbtől kezdve rendre 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, … A vizsgált két szám között 9 a különbség. Ilyen különbség csak a 16 és a 25 között fordul elő szomszédos négyzetszámok között. (Minél nagyobbak a négyzetszámok, annál nagyobb a különbség két szomszédos között.) Az is elfogadható, ha igazolják, hogy nem is négyzetszám valamelyik.

Helyes válasz: 1 pont
Jó indoklás: 2 pont

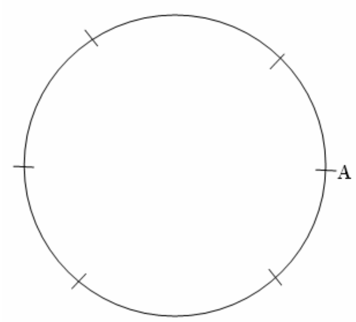
(A feladatoknál a leírtaktól különböző, de teljes értékű megoldásra is maximális pontszám adandó.)

BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
FŐVÁROSI DÖNTŐ – SZÓBELI (2005. NOVEMBER 26.)

MEGOLDÁS ÉS PONTOZÁSI ÚTMUTATÓ

8. osztály

1. feladat:



Az adott R sugárral a kör A pontjából elindulva kijelöljük egy szabályos hatszög csúcsait; a harmadikként kijelölt pont az átmérősen ellentett pontja A-nak.

Helyes szerkesztési mód: 1 pont
Az átellenes pont helyes megjelölése: 1 pont

2. feladat:

Indirekt úton bizonyítunk. Legyen $1 \le a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_{12} < 144$ a 12 vizsgált pozitív egész szám. Ha nincs közöttük három, amelyek egy háromszög oldalai lehetnének, akkor a háromszög-egyenlőtlenség alapján:

$a_3 \ge a_1 + a_2 \ge 1 + 1 = 2$ $\qquad$ $a_8 \ge a_6 + a_7 \ge 8 + 13 = 21$

$a_4 \ge a_2 + a_3 \ge 1 + 2 = 3$ $\qquad$ $a_9 \ge a_7 + a_8 \ge 13 + 21 = 34$

$a_5 \ge a_3 + a_4 \ge 2 + 3 = 5$ $\qquad$ $a_{10} \ge a_8 + a_9 \ge 21 + 34 = 55$

$a_6 \ge a_4 + a_5 \ge 3 + 5 = 8$ $\qquad$ $a_{11} \ge a_9 + a_{10} \ge 34 + 55 = 89$

$a_7 \ge a_5 + a_6 \ge 5 + 8 = 13$ $\qquad$ $a_{12} \ge a_{10} + a_{11} \ge 55 + 89 = 144$

Ezzel ellentmondásra jutottunk, tehát a feladat állítását bebizonyítottuk.

A megoldáshoz vezető módszer kitalálása: 2 pont
Helyes kivitelezés: 3 pont

3. feladat:

Ha a sík egy pontjába önmagával párhuzamosan eltoljuk az összes átlót, az általuk bezárt szögek nem változnak. Mivel 9 átlója van a hatszögnek, a pont körül 18 darab szög keletkezik. Ha minden szög nagyobb volna 20°-nál, akkor ezek összege több lenne $18 \cdot 20° = 360°$-nál. Tehát nem lehet mindegyik szög 20°-nál nagyobb, vagyis az állítás igaz.

Az átlók szögének egy pont köré gyűjtése: 1 pont
Helyes módszer megtalálása: 1 pont
A módszer helyes kivitelezése: 1 pont

(A feladatoknál a leírtaktól különböző, de teljes értékű megoldásra is maximális pontszám adandó.)

BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
FŐVÁROSI DÖNTŐ – SZÓBELI (2005. NOVEMBER 26.)

„Szétlövő” kérdés

(holtverseny esetére, bármely évfolyamnak)

A következő feladatot a holtversenyben lévő csapatok egyszerre kapják meg. Amelyikük előbb ad helyes megoldást, az a csapat éri el a jobbik helyezést. Ha egy csapat rossz választ ad, az ellenfél nyer.

4. feladat:
Egy 20 emeletes toronyházba elfelejtettek lépcsőt tervezni, így a házban csak lifttel lehet közlekedni. A földszinten 9-en, az 1. emeleten 10-en, a 2.-on 11-en, …, a 20.-on 29-en laknak. (Minden emeleten eggyel többen, mint az alatta lévőn.)
Egy éves időtartam alatt melyik szinten áll meg leggyakrabban a lift?

Megoldás: A földszinten.