BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2012. NOVEMBER 24.)

FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

3. osztály

1. feladat (*2 pont*):
Két szám összege 33. Mennyi ennek a két számnak a különbsége, ha az egyik kétszerese a másiknak?

Megoldás:
A kisebb szám az összeg egyharmada, ezért értéke 11, és így a nagyobb szám a 22 (*1 pont*). A két szám különbsége így 22 – 11 = 11 (*1 pont*).

2. feladat (*5 pont*):
Hány olyan háromjegyű szám van, amelyben a számjegyek összege legalább 25?

Megoldás:
A három számjegy, amelyek összege legalább 25, valamint a hozzájuk tartozó megfelelő számok a következők:

9 + 9 + 9 = 27;	999	1 darab (*1 pont*);
9 + 9 + 8 = 26,	899, 989, 998	3 darab (*1 pont*);
9 + 9 + 7 = 25;	799, 979, 997	3 darab (*1 pont*);
9 + 8 + 8 = 25;	889, 898, 988	3 darab (*1 pont*).

Összesen tehát 10 megfelelő szám van (*1 pont*).

3. feladat (*3 pont*):
Négy gyerek életkorának összege most 32 év. Hány év múlva lesz életkoruk összege 60 év?

Megoldás:
A négy gyerek életkorának összege évente 4 évvel növekszik (*1 pont*). Összesen 60 – 32 = 28 évvel kell növekednie az összegnek (*1 pont*). Ez 28 : 4 = 7 év múlva következik be (*1 pont*).

BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2012. NOVEMBER 24.)

FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

4. osztály

1. feladat (*2 pont*):
A Zimrili Színház nézőterének minden sorában 25 szék található. A székeket az első sortól egyesével számozták úgy, hogy a második és a további soroknál növekvő sorrendben folytatták a számozást (például a második sor első széke a 26-os számú szék). Hány sor van ezen a nézőtéren, ha Ibolya a középső sorban a 633-as számú széken ül?

Megoldás:
Mivel $633 = 25 \cdot 25 + 8$, ezért a 26. sor a nézőtér középső sora (*1 pont*). Így ha a középső sor előtt 25 sor van, akkor utána is 25 sornak kell lennie, vagyis a nézőtéren összesen 25 + 1 + 25 = 51 sor található (*1 pont*).

2. feladat (*5 pont*):
Három edényben – amelyek mindegyikének űrtartalma legalább 15 liter – egyenként 6 liter, 7 liter és 11 liter víz található. Egy lépésben valamelyik edénybe annyi vizet szabad áttöltenünk egy másikból, hogy ezután éppen kétszer annyi víz legyen benne, mint előtte volt. Három lépés után mindegyik edényben ugyanannyi víz lett. Hogyan érhettük ezt el? (A három edény tartalmát csak egymásba öntögethetjük, és nincs máshonnét vízvételi lehetőségünk.)

Megoldás:
A három lépés után mindegyik edényben (6 + 7 + 11) : 3 = 8 liter víz lesz (*2 pont*). Visszafelé gondolkodva, az egyes lépések a következők voltak (a számok az edényben lévő vízmennyiséget jelölik literben):

3. lépés:	$\boxed{12}$	$\boxed{8}$	$\boxed{4}$	→	$\boxed{8}$	$\boxed{8}$	$\boxed{8}$	(*1 pont*)
	–4		*+4*					
2. lépés:	$\boxed{6}$	$\boxed{14}$	$\boxed{4}$	→	$\boxed{12}$	$\boxed{8}$	$\boxed{4}$	(*1 pont*)
	+6	*–6*						
1. lépés:	$\boxed{6}$	$\boxed{7}$	$\boxed{11}$	→	$\boxed{6}$	$\boxed{14}$	$\boxed{4}$	(*1 pont*)
		+7	*–7*					

3. feladat (*3 pont*):
Állapítsátok meg, mi lehet a szabály! Melyik két szám hiányzik a táblázatból?

a	1	2	3	10	6	
b	3	8	13	48		23

Megoldás:
Egy lehetséges szabály: $b = 5 \cdot a - 2$ vagy $a = (b+2) : 5$. (*1 pont*)
Az utolsó előtti oszlopból a 28 (*1 pont*), az utolsó oszlopból az 5 (*1 pont*) hiányzik.
Más helyes szabály megtalálása esetén hasonlóan adhatóak a pontok.

BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2012. NOVEMBER 24.)

FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

5. osztály

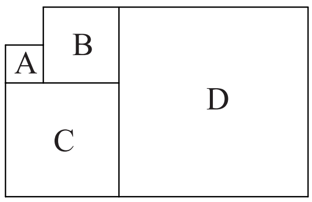
1. feladat (*2 pont*):
Évszámíró Éva leírta egymás után az évszámokat, 2012-től kezdve visszafelé a honfoglalás évéig (így: 2012201120102009200820070…). Milyen számjegy áll ebben a sorban a 2012. helyen?

Megoldás:
A négyjegyű számok leírásához 4 számjegyre van szükség. Mivel 2012 : 4 = 503, így Éva 503 négyjegyű évszámot írt le a 2012. helyig (*1 pont*). Így az első négyjegyű szám, amit nem kell figyelembe vennünk, a 2012 – 503 = 1509. Tehát az 1510-es utolsó számjegye, azaz a 0 áll a sor 2012. helyén (*1 pont*).

2. feladat (*5 pont*):
A ló és a szamár egymás mellett bandukoltak, nehéz teherrel a hátukon. A szamár elkezdett panaszkodni, mire a ló így felelt: „Miért panaszkodsz? Ha egy zsákot átvennék a hátadról, az én málhám kétszer olyan nehéz lenne, mint a tiéd. Ha viszont te vennél át egy zsákot az én hátamról, akkor a te málhád még mindig csak olyan nehéz lenne, mint az enyém." Hány zsákot vitt a ló és hányat a szamár, ha a zsákok egyforma nehézségűek voltak?

Megoldás:
Ha a ló átadna egy zsákot a szamárnak, egyforma lenne a zsákok száma, így a ló hátán 2-vel több zsáknak kell lennie (*1 pont*). Ha a szamár adna át egy zsákot, akkor tovább növekedne a hátukon lévő zsákok száma közti különbség, mégpedig úgy, hogy a szamár hátán még 1-gyel kevesebb, a ló hátán még 1-gyel több zsák lenne, vagyis a különbség ekkor 2 helyett 4 lenne (*1 pont*). Viszont ekkor lenne kétszer annyi a ló hátán. Ez azt jelenti, hogy a szamár hátán ekkor éppen 4, a ló hátán pedig éppen 8 zsák volna (*1 pont*). Így a képzelt rakosgatás előtt a szamár hátán 5, a ló hátán pedig 7 zsák van (*1 pont*). Ez valóban teljesíti a feltételeket (*1 pont*).

3. feladat (*3 pont*):
A mellékelt ábrán az A, B, C és D alakzatok négyzetek. Ha B kerülete 16 cm és D kerülete 40 cm, akkor mennyi az A alakzat területe?



Megoldás:
B oldalhossza 4 cm, D oldalhossza 10 cm (*1 pont*). Így C oldalhossza 10 – 4 = 6 cm, amiből adódik, hogy A oldalhossza 6 – 4 = 2 cm (*1 pont*). Ezért A területe 4 cm^2 (*1 pont*).

BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2012. NOVEMBER 24.)

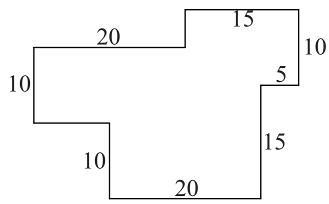
FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

6. osztály

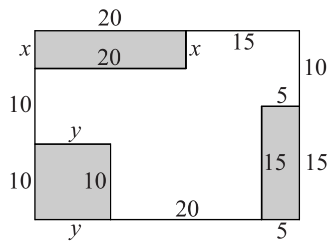
1. feladat (*2 pont*):
Három lány (Anna, Bori és Csilla) közül az egyik igazmondó, aki mindig igazat mond, a másik hazudós, aki mindig hazudik, és a harmadik szeszélyes, aki néha igazat mond, néha hazudik. A következőket állítják: Anna: „Szeszélyes vagyok.” Bori: „Anna igazat mondott.” Csilla: „Nem vagyok szeszélyes.” Melyikük miféle ember?

Megoldás:
Anna biztosan nem igazmondó, mert egy igazmondó nem állítja magáról, hogy szeszélyes (*1 pont*). Tegyük fel, hogy Anna szeszélyes. Ekkor Bori igazmondó, és így Csilla csak hazudós lehet, de ez ellentmondás, mert Csilla állítása ekkor igaz volna. Így Anna hazudós. Ekkor Bori állítása nem igaz, ezért Bori szeszélyes, és így Csilla az igazmondó (*1 pont*).

2. feladat (*5 pont*):
Az ábrán nagyapa kertje látható, egyes oldalainak méterben kifejezett méretével. Mekkora a kerülete és a területe ennek a kertnek?



Megoldás:



Ha kiegészítjük az ábrát az oldalt látható módon, megfigyelhető, hogy a kert kerülete azonos a 20 + 15 méter hosszúságú és 10 + 15 méter szélességű kert kerületével, vagyis a kerület $2\cdot(35+25)=120$ méter (*1 pont*). Az alakzat területét úgy kaphatjuk meg, hogy a 35×25-ös méretű téglalap területéből kivonjuk a szürke téglalapok területét (*1 pont*). Ehhez meg kell állapítanunk x és y értékét, amit a szemközti oldalméretek ismeretéből számíthatunk ki: $x + 10 + 10 = 10 + 15$, ahonnan $x = 5$ méter, valamint $y + 20 + 5 = 20 + 15$, ahonnan $y = 10$ méter (*1 pont; ez akkor is jár, ha a csapat a kerületnél határozza meg x és y értékét*). A szürke területek így: $20\cdot 5=100$ m^2; $10\cdot 10=100$ m^2 és $15\cdot 5=75$ m^2 (*1 pont*). A nagy téglalap területe $35\cdot 25=875$ m^2, így a kert alapterülete 875 – 100 – 100 – 75 = 600 m^2 (*1 pont*).

3. feladat (*3 pont*):
Ismerjük egy háromszög két oldalának hosszát: 3 cm és 5 cm. Milyen hosszú lehet a harmadik oldala, ha tudjuk, hogy annak hossza centiméterben mérve egész szám?

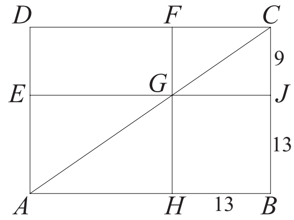
Megoldás:
A háromszög-egyenlőtlenség alapján a harmadik oldal hosszának kisebbnek kell lennie a másik két oldalhossz összegénél, és nagyobbnak kell lennie a másik két oldalhossz különbségénél (*1 pont*). Tehát a harmadik oldal hossza 3, 4, 5, 6 vagy 7 cm lehet (*2 pont, ha egy csapat az összes lehetőséget megadja; ennek hiányában 1 pont csak akkor adható, ha legalább 3 jó lehetőséget megadnak*).

BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2012. NOVEMBER 24.)

FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

7. osztály

1. feladat (*2 pont*):
Az $ABCD$ téglalap AC átlóján található G ponton keresztül húzott EJ és FH szakasz párhuzamos a téglalap megfelelő oldalaival (lásd az ábrán). Tudva, hogy DA = 22 cm, HB = 13 cm és CJ = 9 cm, mekkora a $DEGF$ téglalap területe?

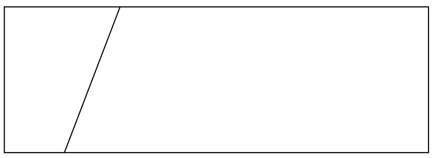


Megoldás:
Tudjuk, hogy JB = 22 – 9 = 13 cm, így T_{JGHB} = 169 cm^2 (*1 pont*). A téglalap átlói felezik a téglalap területét, ezért $T_{DCA} = T_{BCA}$, valamint $T_{EGA} = T_{HGA}$, illetve $T_{FCG} = T_{JCG}$, így $T_{DEGF} = T_{JGHB}$ = 169 cm^2 (*1 pont*).

2. feladat (*5 pont*):
Négy ember egy alagúton szeretne átjutni. Az egyikük 1 perc, a másik 2 perc, a harmadik 5 perc, a negyedik 10 perc alatt képes végigmenni ezen az alagúton. A bökkenő az, hogy egyszerre csak legfeljebb ketten haladhatnak, és lámpa nélkül lehetetlen a közlekedés. Mennyi az a legrövidebb idő, amely alatt mind a négyen átjuthatnak az alagút ugyanazon végéből a másikba, és hogyan, ha csak egy lámpájuk van?

Megoldás:
Először átmegy az 1 és 2 percet igénylő, ez 2 percig tart, majd a lámpával visszamegy az 1 perces (*1 pont*); ez eddig 3 perc. Utána átmegy az 5 és 10 percet igénylő, ez 10 percig tart, és a lámpát visszaviszi a 2 perces (*1 pont*); ez már összesen 15 perc. Végül az 1 és 2 perces is átjön 2 perc alatt, így 17 percig tartott az átjutás (*1 pont*). *(Ha egy csapat 19 perces átjutást ad meg, 1 pontot kaphat rá.)*
Kevesebb idő alatt a következő okok miatt nem juthatnak át: A lámpa a célhoz eljutva mindig 1-gyel növeli a célban maradó személyek számát, kivéve az utolsó alkalmat. Mivel négyen kell átjutniuk, legkevesebb háromszor kell célba érni, de ehhez legkevesebb kétszer vissza is kell menni a lámpával. Tehát legalább 5-ször kell úton lennie a lámpának. Ekkor mindig pontosan két személy van a cél felé vivő úton, így ezek közül az egyik legalább 10 percig, a másik kettő pedig legalább 2-2 percig tart, tehát a két visszautat kellene kevesebb mint 3 perc alatt megjárniuk. Ez csak akkor volna lehetséges, ha az 1 perces tenné meg mindkét visszautat. Ez viszont azt jelentené, hogy az 1 percesnek minden alkalommal oda-vissza kellene mennie, de ekkor az 5 és 10 perces külön-külön menne át, így csak ez a két odaút már 15 percig tartana, vagyis a teljes átjutási idő meghaladná a 17 percet (*2 pont*). *(Ha egy csapat megpróbálja bizonyítani, hogy az általuk megtalált megoldás minimális, de nem jut el a bizonyítás végéig, legfeljebb 1 pontot kaphat az értékelhető gondolatrészekre.)*

3. feladat (*3 pont*):
Két testvér egy téglalap alakú telket örökölt szüleitől, és az ábrán látható ferde vonal mentén osztották ketté. Ha a kettéosztott telkek kerülete 230 méter és 470 méter lett, míg az eredeti telek kerülete 550 méter volt, akkor milyen hosszú a két telket kettéosztó ferde kerítés?



Megoldás:
A két telek kerületösszege, ami 230 + 470 = 700 m, kétszer tartalmazza a ferde kerítés hosszát (*1 pont*), így pontosan ennyivel több az eredeti telek kerületénél. Tehát a ferde kerítés hosszának kétszerese 700 – 550 = 150 m (*1 pont*), és így a hossza 75 méter (*1 pont*).

BOLYAI MATEMATIKA CSAPATVERSENY
ORSZÁGOS DÖNTŐ – SZÓBELI (2012. NOVEMBER 24.)

FELADATOK ÉS MEGOLDÁSOK

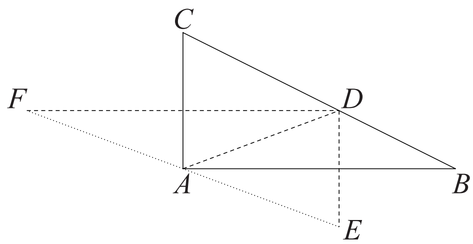
8. osztály

1. feladat (*2 pont*):
Adott a 0, 25, 50, 75, 100, 125, 150, 175, … számsorozat. Ebből megalkotunk egy második számsorozatot úgy, hogy az első minden elemét kicseréljük számjegyei összegére: 0, 7, 5, 12, 1, 8, 6, 13, …
Mutassátok meg, hogy a második sorozat tartalmazza az összes természetes számot!

Megoldás:
A 0 tagja a második sorozatnak. Mivel az első sorozat tagjai között megtalálhatók a 100, 1100, 11100, 111100, 1111100, 11111100, … számok (*1 pont*), ezért a második sorozat tagjai között lesz az 1, 2, 3, 4, 5, 6, …, vagyis minden természetes szám (*1 pont*).

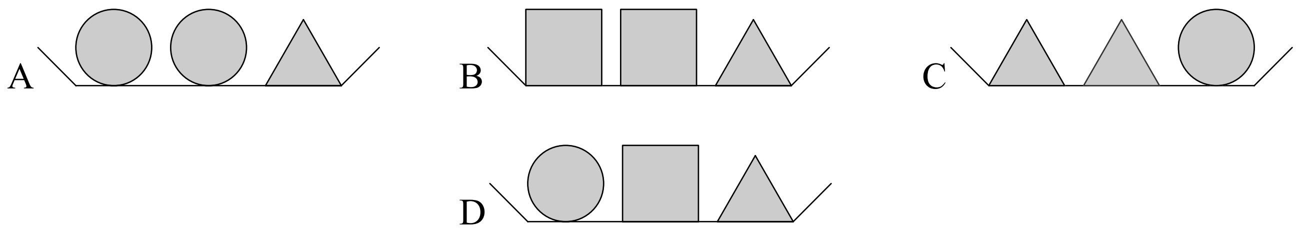
2. feladat (*5 pont*):
Az *A*-ban derékszögű *ABC* háromszög átfogójának *D* egy tetszőleges pontja. Jelölje *E*, illetve *F* a *D*-nek *AB*-re, illetve *AC*-re vonatkozó tükörképét. Mutassátok meg, hogy az *E*, *A* és *F* pontok egy egyenesre esnek!

Megoldás:
Az *EAD* háromszögben *AB* súlyvonal és magasság, így szögfelező is (*2 pont*). Ekkor az *EAD* szög kétszerese a *BAD* szögnek (*1 pont*). Hasonlóan az *FAD* szög kétszerese a *CAD* szögnek (*1 pont*). Ekkor $EAF\sphericalangle = EAD\sphericalangle + FAD\sphericalangle = 2(BAD\sphericalangle + CAD\sphericalangle) = 2\cdot 90° = 180°$, tehát *A* rajta van az *EF* egyenesen (*1 pont*).



Második megoldás: Az *EDF* háromszög derékszögű (*1 pont*), amelyben *AC* és *AB* is oldalfelező merőlegesek (*1 pont*), így metszéspontjuk a körülírt kör középpontja (*1 pont*). Ez pedig – lévén a háromszög derékszögű – az átfogó felezőpontja (*1 pont*), így rajta van *EF*-en (*1 pont*).

3. feladat (*3 pont*):
Az ábrán az azonos alakzatok azonos tömeget képviselnek. Ha az A, B és C tányérok ebben a sorrendben, tömegük szerinti csökkenő sorrendben találhatók, akkor hova illeszthető be ebbe a sorba tömege alapján a D tányér?



Megoldás:
A nehezebb B-nél, ezért a kör nagyobb tömeget képvisel a négyzetnél (*1 pont*). Tehát ha A-ban az egyik kört négyzetre cseréljük (és így D-t kapjuk), emiatt könnyebbet kapunk, így D könnyebb A-nál (*1 pont*). Ha viszont B-ben az egyik négyzetet körre cseréljük (és így D-t kapjuk), nehezebbet kapunk, így D nehezebb B-nél. Tehát D az A és B közé illeszthető (*1 pont*).